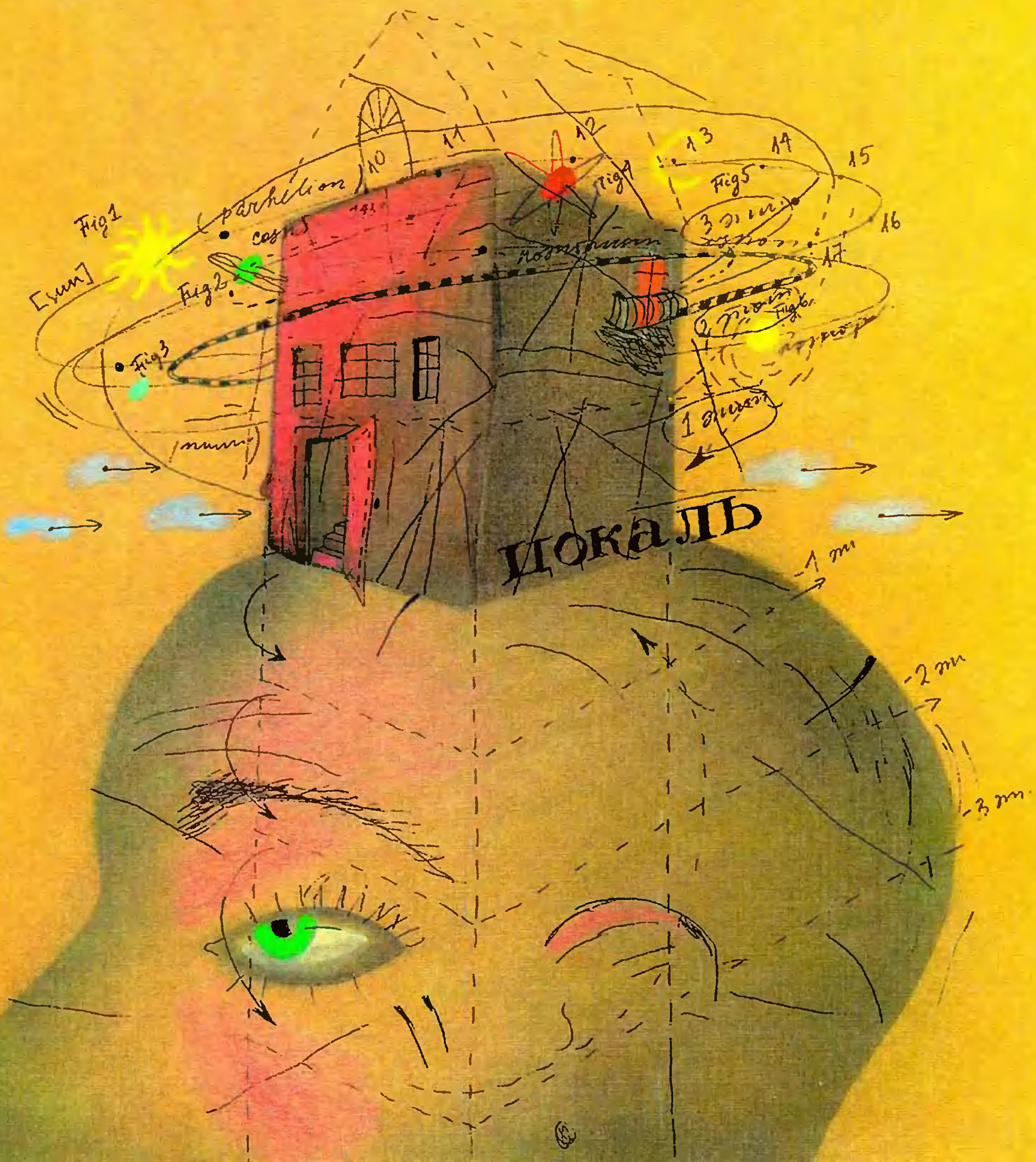
ISSN 0130-2221
ЯНВАРЬ/ФЕВРАЛЬ
2003 №1

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ

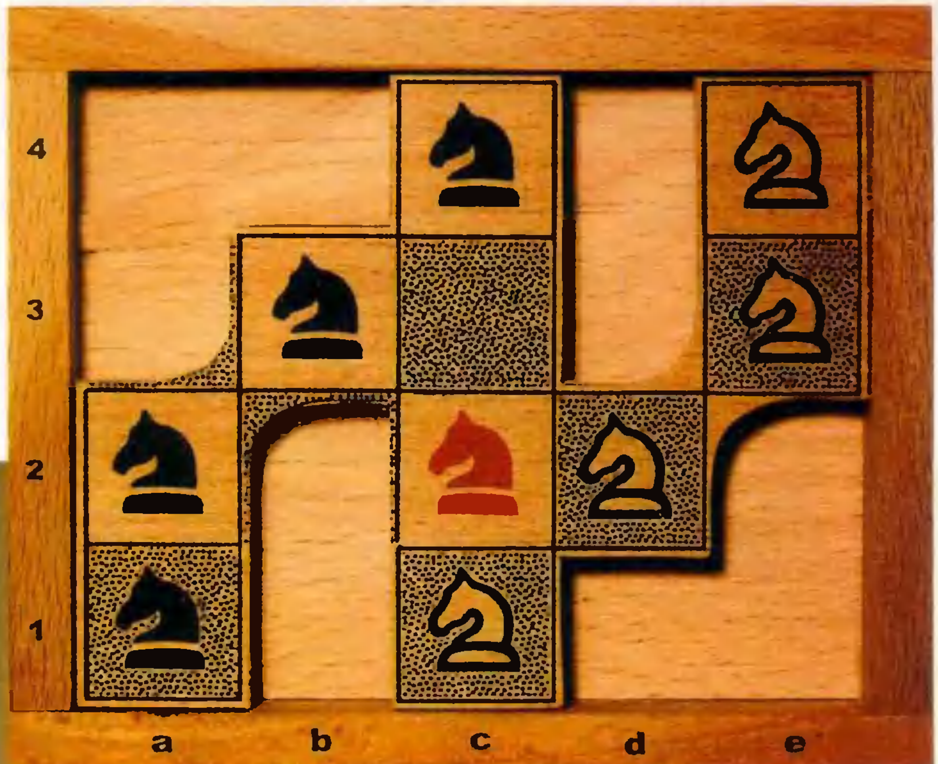


В прошлом номере журнала была опубликована головоломка, которую не смог решить ни один из участников Чемпионата России 2002 года по решению головоломок. Сегодня вы познакомитесь с не менее трудной задачей, которую придумал известный изобретатель головоломок Владимир Красноухов. Вот ее условие.

Имеется часть шахматного поля, состоящая из 10 клеток. На 9 клетках стоят четыре белых коня, четыре черных и один красный конь. Ходом шахматного коня требуется переставить красного коня с поля c2 на поле c3. Все остальные фигуры после перемещений должны вернуться в исходное положение. Лучшее известное решение, которое принадлежит автору головоломки, состоит из 37 ходов.

Читатели могут решать задачу, используя приведенную здесь фотографию. На клетки с изображениями черных, белых и красного коней положите пуговицы соответствующего цвета, а затем перемещайте их по правилам шахматной игры. К шахматам эта головоломка имеет весьма условное отношение, поэтому последовательность ходов черными и белыми фигурами может быть любая. Важно передвинуть коня с поля c2 на поле c3 за наименьшее количество ходов.

А.Калинин



Трехцветные кони

КВАНТ ЯНВАРЬ ФЕВРАЛЬ 2003 №1

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Бюро Квантум

Об абстракции в физике

М.КАГАНОВ

Понятие плоской волны, подобно многим физическим понятиям, есть не больше как абстракция, которую мы можем осуществить лишь с известной степенью точности. Тем не менее это – полезное понятие.

А.Эйнштейн, Л.Инфельд. Эволюция физики

Введение

Достижения современной физики огромны. Они дают возможность непротиворечиво описать свойства элементарных частиц и твердых тел, плазмы и нейтронных звезд, сверхпроводников и солнечного вещества. Появилась надежда построить сценарий развития Вселенной от Большого взрыва до наших дней. Хотя познанное пространство огромно, нас не покидает ощущение, что и теперь мы стоим на берегу океана незнания. Или, в лучшем случае, чуть переступили через береговую черту, если сравнивать наше время с теми далекими временами, когда Ньютон использовал этот образ. Впереди – новые неожиданные открытия. То, что движение от незнания к знанию, похоже, бесконечно, не приводит в уныние, а воодушевляет. Этому способствует преемственность: новое знание не отменяет старое. Новые открытия не требуют зачеркнуть созданную картину Мира, а расширяют ее и совершенствуют.

Можно представить себе огромное строительство. Вырастают новые этажи. Одновременно на всех этажах строящегося здания идет работа. Улучшают отдельные детали, иногда перестраивают этаж-другой. Тех, кто внимательно следит за строительством, особенно интересует, что происходит на уровне фундамента. Они испытывают волнение, когда выясняется, что фундамент требует усовершенствования. Особенно остро воспринимается необходимость строительства нового, более глубокого этажа. Проходит некоторое время, у фундамента появляется новый этаж, волновавшиеся привыкают. На верхних этажах продолжается совершенствование постройки. Многие строители попросту не заметили изменений, происшедших с фундаментом. Конструкция такова, что строительство одного этажа почти не зависит от происходящего на других. Никто не может предсказать, какой этаж потребует в ближайшее время концентрации усилий. Строительство идет, повинуясь скрытому от строителей плану. Вспоминают прошедшие этапы строительства, и возникает впечатление, что удалось уловить черты плана – плана, по которому веками осуществлялось строительство. Но попытка руководствоваться старым планом для продолжения строительства, как правило, ни к чему хорошему не приводит.

В сравнении истории физики со строительством есть некое лукавство. Собственно говоря, что строят физики? Мир, который изучают физики, существует вне зависимости от того, изучают его или нет. Мы в этом уверены. Но... Давайте мир, который мы непосредственно ощущаем, которым часто любуемся или который мысленно проклинаем, когда он оборачивается своей неприглядной стороной, сравним с тем миром, который различается за строгими законами, формулируемыми на страницах учебника физики, который описывается изящными уравнениями, допускающими не менее изящные решения. Думаю, возникал у вас крамольный вопрос: «Какое отношение к реальному миру имеет мир физики, а впрочем, и любой другой науки?»

Строгость, порядок, красоту привнесли в Мир художники и ученые-естествоиспытатели. Правда, «привнесли» – неточное слово. Обнаружили, обратили внимание, подчеркнули, показали. И именно тем привнесли.

Превращение беспорядочного, неорганизованного, чувственного мира в гармоничный мир, упорядоченный пониманием, – заслуга науки. Среди средств, используемых для гармонизации, важное место зани-

Один из наших любимых и давних авторов, замечательный физик М.И. Каганов закончил работу над новой книгой. Она называется «Беседы об абстракции в физике и математике». Часть книги, посвященную физике, написал сам Моисей Исаакович, а другую часть, о математике, написал его друг и давний соавтор Г.Я.Любарский.

М.И.Каганов уже много лет живет в далеком городе Бостоне. Несмотря на это, он продолжает дружить с нашим журналом и нашими читателями. Посмотрев журналы «Квант» за последние годы, вы найдете не одну его статью. Каждую из них мы читали и публиковали с радостью и удовольствием.

С такими же чувствами мы представляем здесь несколько отрывков из новой книги М.И.Каганова и надеемся, что скоро книга выйдет в свет и вы сможете прочитать ее целиком.

Иллюстрация Е.Силиной

мает абстракция. Хочется верить, что нам удастся показать это на нескольких примерах из разных областей физики.

Элементарные частицы

Научное и бытовое словоупотребления часто не совпадают. «Словарь русского языка» под редакцией С.И.Ожегова (М.: Русский язык, 1975) предлагает пять разных смысловых значений для прилагательного «элементарный». Строго говоря, ни одно из них не соответствует тому значению, которое несет на себе слово «элементарные» в заглавии раздела. Для контраста сравните два выражения: элементарная математика и элементарные частицы. Между прочим, в физике элементарных частиц используется весьма сложная, современная, отнюдь неэлементарная математика.

Частицы, из которых состоит все, что нас окружает: весь вещный мир, все предметы, биологические объекты, а также другие планеты Солнечной системы и далекие звезды, – это молекулы, атомы, электроны, протоны, нейтроны... Многоточие здесь не для красоты, а для того, чтобы подчеркнуть – мы перечислили отнюдь не все, что имеет право претендовать на звание структурной единицы материи. Например, нами не упомянуты кварки.

Обилие «кирпичей мироздания» несколько настораживает. Возникает естественный вопрос: «Как считать, из чего состоит Мир? Из чего состоим мы сами?» Химия отвечает: из молекул и атомов. Физика идет глубже: из протонов, нейтронов и электронов. А современная физика элементарных частиц выяснила, что протоны и нейтроны состоят из кварков. Значит, химия и «вчерашняя» физика неправы? А физика элементарных частиц, отменив устаревшие ответы, дает новый, единственно правильный ответ? Нет, конечно, нет! В каком-то смысле все правы.

В политике один из руководящих принципов: «Разделяй и властвуй!» В науке на всем ее пути развития важную роль играл принцип, лишь частично совпадающий с принципом политиков: «Разделяй и познавай!» Такой подход можно назвать методом осколков. Разделил на составные части, исследовал то, на что разделил, и узнал, из чего состоит... Но все прекрасно понимают, что характер осколков существенно зависит от приложенных усилий. Интересно, что кому вспомнится: разбитая посуда или конструктор? Таким образом, понятие «составная часть», в какой-то мере совпадающее с понятием «элементарная частица» (но ему не тождественное!), зависит от нас, от того, сколько усилий мы готовы потратить на разборку.

Вещества при испарении самостоятельно, под воздействием температуры, разлагаются на молекулы. Химия знает множество способов разлагать молекулы на атомы. Наименование «атом» (от греч. átomos –

неделимый) зафиксировало античное неумение разлагать атомы на составные части. Атомная физика позволила исследовать структуру атома. Выяснилось, что атом – сложная система: масса сосредоточена в ядре, вокруг которого вращаются электроны. Ядерная физика не только установила, что и ядра – сложные системы, состоящие из протонов и нейтронов, но и научилась расщеплять атомные ядра. Осуществилась мечта алхимиков о превращении одного элемента в другой.

Расщеплять атомные ядра – непростая задача. Ее решение потребовало строительства гигантских ускорителей, хотя некоторые ядра разделяются сравнительно легко: например, под действием медленных нейтронов. Такая реакция энергетически выгодна, она легла в основу действия атомной бомбы и атомного реактора.

Проникновение в глубь нуклонов (протона, нейтрона) – совсем сложная задача. Она была решена лишь во второй половине XX века. Изучая структуру нуклонов, физики натолкнулись на загадочную, не имеющую прецедентов ситуацию: нуклон структуру имеет, а не делится. Кварки, из которых состоят нуклоны, не наблюдаются в свободном состоянии. Похоже, сегодня нет общей точки зрения, причислять кварки к элементарным частицам или нет.

Последние два абзаца могут привести к мысли, что выбор структурных единиц и элементарных частиц целиком определяется научным содружеством. Большая доля истины в этом есть. Но, как всегда, введение термина фиксирует объективные свойства того, что мы изучаем, в данном случае – свойства микроскопических частиц и их конгломератов.

Важно понять, что термины «структурная единица» и «элементарная частица» не совпадают.

Последнее издание «Физической энциклопедии» фиксирует несколько сот частиц, которым присвоен титул «элементарная». Это электроны, позитроны, нейтрино, мезоны, нуклоны и многие другие частицы. Там же детально описана кварковая структура многих из них, что, казалось бы, противоречит понятию элементарности.

Еще полвека назад элементарных частиц было гораздо меньше. Обилие элементарных частиц породило потребность попытаться проникнуть в глубь элементарных частиц. Именно таким образом были открыты кварки. Бесконечный это процесс или в конце концов будут открыты истинно элементарные частицы, думаю, никто сказать не может. Признаться, мне хочется верить, что процесс дробления имеет естественный предел. Возможно, невылет кварков – первое свидетельство того, что предел существует.

Ответ на вопрос: «Из чего состоит данное тело?» определяется выбором структурной единицы макроскопической системы. Выбор в большой мере зависит от того, какую задачу ставит перед собой исследователь.

Для исследователя естественно желание объяснить наблюдаемое явление. Но в разное время под объяснением понимали разное. Сейчас, если речь идет об объяснении (понимании) какого-либо свойства макроскопического тела, объяснение строится обычно следующим образом: прежде всего выясняют, из каких микроскопических частиц состоит тело, как движутся частицы, из которых тело состоит, и наконец устанавливают, какое конкретное движение частиц соответствует интересующему нас свойству. Не должно вызывать удивления, что для объяснения разных свойств тел приходится по-разному углубляться в строение вещества. Свойство диктует необходимую глубину проникновения и тем самым определяет, какие частицы могут быть приняты за структурные единицы тела. Этим определяется выбор тех частиц, которые называют в ответ на вопрос, из чего состоит данное тело.

Из сказанного очевидно, что одну и ту же частицу иногда следует считать структурной единицей, иногда – нет.

Приведем один пример. Исследуется поликристалл. Для выяснения многих его свойств (прочности, пластичности, электро- и теплопроводности) достаточно знать, что он состоит из кристаллитов, знать, как они расположены друг относительно друга (есть текстура или ее нет) и что из себя представляют кристаллические прослойки. Кристаллит при таком подходе – структурная единица поликристалла.

Вопрос: «Какова природа наблюдаемой электропроводности?» требует понимания, из чего состоит кристаллит – из нейтральных атомов (тогда, скорее всего, это полупроводник) или из ионов и электронов (металл). Выяснив, скажем, что кристаллит – металл, как правило, мы не должны углубляться в структуру ионов. Можно просто считать, что атом потерял свои Z валентных электронов, а ион с зарядом $+Ze$ служит для электронов источником поля сил, в котором электроны движутся. Этого достаточно, чтобы произвести расчет зонной структуры, а разрешив ионам колебаться, мы сможем вычислить электро- и теплопроводность. Итак, в данном случае структурные единицы – ионы с зарядом $+Ze$ и электроны, покинувшие атомы.

Способность металла отражать электромагнитные волны – результат наличия в металле свободных электронов. Но если мы хотим исследовать поглощение света металлом (или фотоэффект), то нам придется задуматься о строении ионов, о том, в каких состояниях находятся электроны в составе иона. Роль структурных единиц начинают играть все электроны, а не только валентные, и ядра атомов.

Наконец, есть ядерные эффекты, специфические для твердых тел. Например, эффект Мёссбауэра – резонансное излучение и поглощение γ-квантов без отдачи ядра – или распад ядра урана на осколки, которые, разлетаясь, взаимодействуют с электронами и ионами. Рассматривая такие эффекты, нельзя считать ядра структурными единицами. В таких явлениях структурные единицы – это нуклоны.

В этом небольшом разделе мы ни разу не употребили слова «абстракция». Это потому, что он целиком абстрактен. Конкретизация, в той мере, в которой она есть, – только в виде примеров.

Тождественность и неразличимость

Когда речь идет о макроскопических предметах или даже таких небольших совокупностях атомов, как кристаллит в поликристалле, то каждый из них обладает своей особой неповторимостью. Как бы ни старались, к примеру, сделать все пули одинаковыми, опытный следователь сможет определить, какой из них был произведен смертельный выстрел. А вот элементарные частицы тождественны. Ни один электрон ничем не отличается от другого, то же можно сказать о протоне и нейтроне. Сложнее дело обстоит с атомами и молекулами. Молекулы и атомы обладают определенной структурой. Жесткой структурой. Заэкранированные от воздействия, они не будут изменяться. Если бы кто-то решил заменить «хранящуюся» молекулу на какую-то другую того же сорта (молекулу, скажем, воды на другую молекулу воды), мы не сумели бы определить, сделал ли он замену или не сделал. То же самое с атомами. Ни один атом не отличим от своего собрата. Любой атом, например, азота невозможно отличить от любого другого атома азота.

Правда (и именно поэтому дело обстоит несколько сложнее), и атом, и молекулу можно пометить. Например, возбудить электронную оболочку того сложного образования, которое в зависимости от состава именуется атомом или молекулой. Тем самым можно выделить какой-либо атом, какую-либо молекулу. Но не нужно думать, что метка (возбуждение) накрепко прикреплена к атому или к молекуле, как царапина на пуле, позволяющая ее идентифицировать. Если волею судьбы неподалеку от возбужденного атома окажется невозбужденный, а потом их траектории разойдутся, то мы принципиально не сможем сказать, остался ли возбужденным тот же атом, или возбуждение «перебралось» на другой.

Пометить атом или молекулу можно и более вычурным способом. Многие ядра существуют в разных модификациях, именуемых изотопами. Они отличаются друг от друга числом нейтронов при том же числе протонов. Число протонов задает число электронов в электронной оболочке атома и, тем самым, большинство его химических (атомных) свойств. Переместиться нейтрону из ядра в ядро непросто. Нейтроны устойчиво метят атом. Это позволяет с помощью изотопов следить за перемещением отдельных атомов и молекул. Так и говорят – метод меченых атомов. Он широко применяется в разных сферах – от материаловедения до медицины.

Среди микрочастиц особенно важное и почетное место занимает электрон – необходимая составная часть любого атома. Электрон – первая открытая (Дж.Дж.Томсон, 1897) и наиболее изученная элементарная частица. В этом разделе мы будем говорить об электронах, хотя многое, о чем будет рассказано, относится и к другим частицам.

Как и другие элементарные частицы, все электроны тождественны. Тождественность как бы специально предназначена для создания понятия «электрон». Используя это понятие, мы не должны задумываться, идет ли речь о конкретном электроне или об электроне вообще, об электроне как абстрактном понятии. Это одно и то же. Нет таких черт у электрона, которые можно отбросить, не превратив его в нечто иное.

Остановимся чуть подробнее на тождественности электронов. Сначала – с позиции классической физики. Вне зависимости от того, как мы описываем электроны – с помощью формул классической физики или квантовой, электроны не теряют своей тождественности. Электроны, прилетевшие из космического пространства в составе космических лучей, и электроны в лучевой трубке телевизора не отличаются друг от друга. Тождественность электронов и вообще элементарных частиц редко подчеркивается в классической физике. Не потому, что это – неважный факт, а потому, что воспринимается он как самоочевидный.

Ситуации, когда тождественность частиц необходимо учитывать, встречаются в классической физике нередко. Особенно в статистической физике. При построении теории идеальных газов [1] необходимо уметь подсчитывать физически отличающиеся состояния совокупности частиц газа. Вот цитата из пятого тома курса Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшица «Статистическая физика»: «...получим всего [столько-то] возможных распределений, среди которых, однако, есть тождественные, отличающиеся лишь перестановкой частиц (частицы все одинаковы).Число перестановок N частиц есть $N!$..» и т.д. Упоминание об одинаковости частиц, как бы для подчеркивания очевидности сказанного, помещено авторами в скобки.

Великий Джеймс Клерк Максвелл (1831 – 1879, Боже, как мало он прожил!) знаменит главным образом формулировкой уравнений, носящих его имя. Уравнения Максвелла создали современную электродинамику, объединили электричество, магнетизм и оптику. Но, кроме того, Максвелл был одним из создателей кинетической теории газов. Естественно, он столкнулся с необходимостью учитывать тождественность частиц газа. И задолго до открытия структуры атома задумался: «Собственно говоря, почему все атомы одного элемента тождественны?» Действительно, все окружающие нас предметы хоть незначительно, но отличаются друг от друга, а атомы почему-то тождественны. Я вычитал его рассуждения на эту тему в опубликованных лет 30 назад переводах его лекций для сравнительно широкой аудитории (к сожалению, у меня нет их под рукой, когда я пишу этот текст). Меня поразила проницательность Максвелла. Он понял, что причина неразличимости атомов – существование структуры. Атомы тождественны потому, что построены одинаково, по какому-то неизвестному в то время закону. А ведь, вспомните, атом в то время был последней структурной единицей вещества. Само слово «атом» означает неделимый.

Хочу поделиться мыслью, которая, правду сказать, не имеет прямого отношения к теме рассказа. Наверное, Максвелл был верующим человеком. В те времена неверующих было немного. Казалось бы, ему было

---

[1] *Идеальный газ – типичный пример абстракции. Это газ, при описании свойств которого можно абстрагироваться от взаимодействия частиц газа друг с другом.*

естественно подумать: Бог создал все атомы водорода или кислорода одинаковыми. И все... Но нет. Такой ответ его не устраивает. Факт тождественности, как любое явление, требует объяснения. Рассуждал Максвелл, наверное, примерно так: всякое созидание начинается с выработки плана постройки. Совокупность планов составляют законы природы. Поняв их, мы сможем постичь, как устроен и функционирует окружающий нас мир. В частности, ответить на вопрос, почему атомы одного элемента одинаковы.

Боюсь, я навязываю Максвеллу свои мысли. Все же хочется подчеркнуть, что квантовая механика объяснила, почему все атомы одинаковы. Правда, почему тождественны электроны, протоны, нейтроны, мне представляется, остается необъясненным фактом – одним из тех фактов, которые составляют основу наших попыток (весьма успешных, подчеркнем) объяснить устройство окружающего нас Мира.

Вернемся к классическим частицам. После довольно подробных разговоров об их тождественности, наверное, несколько странно прозвучит утверждение, что классические частицы не следует считать принципиально неразличимыми. Более того, тождественность и неразличимость следует различать. Поясним.

Классическая частица движется по определенной траектории. Зафиксировав частицу в какой-то момент времени, мы можем непрерывно следить за ее судьбой. Из-за этого нельзя наблюдаемую классическую частицу спутать с какой-нибудь другой частицей, а уж тем более заменить одну частицу другой. Классические частицы именно поэтому не следует считать принципиально неразличимыми, хотя они тождественны.

А вот квантовые частицы принципиально неразличимы. Их неразличимость – следствие отсутствия траектории, наличия у квантовой частицы волновых свойств, существования принципа неопределенности. Неразличимость – типично квантовое свойство.

С принципиальных позиций микромир, мир элементарных частиц, атомов и молекул, проще окружающего нас мира вещей. Хотя бы тем, что мир вещей построен из элементов микромира. Кроме того, все микрочастицы одинаковы, тождественны. Ранее мы поняли, что создание любого понятия, даже самого простого, как стол, например, требует выделения общих для всех столов свойств и пренебрежение менее существенными. Это выделение и пренебрежение – один из типов абстрагирования. Создавая понятие «электрон», нам не пришлось опускать какие-либо свойства, имеющиеся у электронов, чтобы всех их объединить одним понятием. Оно включает в себя все свойства электрона. Каждый электрон несет на себе свойства всех электронов. Это рассуждение, конечно, не означает, что понятие «электрон» является простым или самоочевидным. Само понятие простоты достаточно сложно. Нас серьезно обучали, что «электрон так же неисчерпаем, как атом». Что это точно означает, думаю, не знает никто. И думаю, что атом сложнее электрона. А любая элементарная частица проще, чем макроскопическая конструкция из элементарных частиц. Как мы уже сказали, и тем, что любая элементарная частица принципиально неотличима от себе подобных.

Может показаться, что неразличимость элементарных частиц (в частности, электронов) несет лишь философскую нагрузку. Это не так. Неразличимость следует учитывать при расчетах разных величин, необходимых при описании физических свойств реально существующих объектов и результатов экспериментов над ними.

Рассмотрим несколько явлений, в которых принимает участие более чем один электрон.

Начнем с рассеяния электрона на атоме. В атоме есть свои электроны. При расчете вероятности процесса рассеяния необходимо учесть факт возможности обмена местами между рассеивающимся электроном и электронами атома. Такие процессы называют процессами обмена. Важно подчеркнуть, что отделить процесс рассеяния с обменом от рассеяния без обмена нет возможности принципиально. Существует единый процесс рассеяния. Зафиксировав рассеянный электрон, нельзя выяснить, тот это электрон, который столкнулся с атомом, или один из электронов атома. Вопрос, какой это электрон, столь же лишен смысла, как вопрос, какова координата электрона, если известен его импульс. Казалось бы, и при принципиальной различимости электронов процессы обмена надо было бы учитывать. Правильно!

Для того чтобы почувствовать, в чем различие, рассмотрим другой процесс рассеяния, напоминающий рассеяние электрона на атоме, – рассеяние мюона на атоме. Мюон очень похож на электрон, у него такой же заряд, как у электрона, но масса его приблизительно в 207 раз больше массы электрона. При рассеянии мюона на атоме отлична от нуля вероятность того, что атом захватит мюон, отдав один из своих электронов. Произойдет обмен электрона на мюон. В отличие от предыдущего случая, это реальный процесс, который можно отличить от рассеяния мюона без его захвата атомом. Более того, можно выделить те атомы, у которых один из электронов заменен мюоном, и исследовать их свойства.[2]

Неразличимость электронов проявляется не только в процессах рассеяния. Во всех процессах, в которых участвуют два или более электронов, проявляется их неразличимость. При взаимодействии атомов друг с другом процессы обмена электронами приводят к существованию дополнительной энергии взаимодействия между атомами – обменной энергии, не имеющей классического аналога.

Без учета неразличимости и следствий из нее (в частности, обменной энергии) нельзя объяснить существование ферромагнетизма, антиферромагнетизма и других более сложных магнитных явлений. Их так и называют – обменными.

Хотя формально (в уме, на бумаге) электроны ме-

---

[2] *Атом водорода, в котором электрон заменен мюоном, получил специальное название – мюоний. Исследование свойств мюония – интересная область физики, принадлежащая как физике твердого тела, так и ядерной физике, а также физике элементарных частиц.*

нять местами можно, как бы далеко атомы ни были расположены друг от друга, нельзя забывать, что обменная энергия очень быстро спадает с расстоянием между атомами. Достаточно разнести атомы на расстояние, превышающее размеры атома в два-три раза, и обменная энергия практически обращается в ноль. Значительно быстрее, чем, например, энергия электростатического притяжения или отталкивания между ионами. А это означает, что, вычисляя энергию взаимодействия между далеко разнесенными ионами, неразличимостью электронов попросту можно пренебречь.

Неразличимость, как было сказано, – не специфическое свойство электронов. Все элементарные частицы (и протоны, и нейтроны, и мюоны, и все мезоны, и кварки), каждая в своем классе, – неразличимы: протоны не отличимы друг от друга, один нейтрон нельзя отличить от другого и т.д. А это значит, что введение понятий «протон», «нейтрон» и т.д., как и введение понятия «электрон», не требует разделения свойств каждой отдельной элементарной частицы на те, которые учитываем, вводя понятие, и на те, которыми пренебрегаем, чтобы не вступать в противоречие с вводимым понятием. Каждый протон имеет свойства всех протонов, каждый нейтрон – всех нейтронов и т.д.

При этом в физике элементарных частиц, как и в любой области физики, примеры использования абстракции при введении новых понятий подобрать совсем нетрудно. Вот один простой пример. Протоны и нейтроны обладают многими общими свойствами. Свойства эти не зависят от того, имеет частица заряд или нет. Абстрагируясь от наличия заряда у протона и от отсутствия заряда у нейтрона, вводят понятие «нуклон», объединяющее эти две частицы.

Пожалуй, никогда в обыденной жизненной практике, объединяя предметы новым понятием, мы не знаем столь точно, какими свойствами мы жертвуем, как в случае введения понятия «нуклон». А жертва отнюдь не мала – электрический заряд. Жертва ли это? В каком-то смысле, да. Конечно, протон не лишается способности притягивать электрон. Но приходится изъясняться так: «В одном из состояний нуклон обладает положительным зарядом и, следовательно, притягивает электрон».

Понятие «нуклон» не всегда полезно.

Вот пример для уточнения слова «полезно». Число нуклонов в ядре определяет атомную массу, а число протонов – атомный номер. Обе характеристики очень важны: атомная масса – в ядерной физике, а атомный номер – в химии.

Термину (понятию) «элементарные частицы» мы посвятили небольшой, но, как нам кажется, важный предыдущий раздел. Термин «элементарные частицы» – хороший пример абстракции. Когда частицу называют элементарной, то, как правило, тем самым подчеркивают нежелание (скорее, отсутствие необходимости в настоящий момент) заниматься ее внутренней структурой. Мы знаем, что нуклоны состоят из кварков, но в подавляющем большинстве случаях об этом можно не думать и считать нуклоны элементарными частицами.

Этим примером хочется еще раз подчеркнуть: процесс выработки понятий, сопровождаемый абстрагированием, – творческий процесс.

Вывод: абстрагирование – часто вполне осознанный прием, который используется при решении определенных задач.

А вот следующее, несколько шокирующее утверждение приведено только, чтобы заинтересовать тех, кто впервые сталкивается с описываемыми понятиями: неразличимость бывает разная.

Спин. Фермионы и бозоны

Как и принципиальная неразличимость, отличие неразличимостей не имеет аналога в классической физике. Отличие неразличимостей тесно связано со спином.

Что прежде всего приходит в голову, когда произносится слово «частица»? Не знаю, как вам, а мне – маленький шарик, нечто маленькое и твердое. Знаю, что это неправильно. Квантовая частица имеет и корпускулярные и волновые черты, частице нельзя приписать определенный размер. Если же реальную частицу наделять свойствами классических частиц, то, скорее, надо было бы представлять частицу в виде материальной точки. Точки... Не укладывается в голове: частица вещества – точка? Нечто вовсе не имеющее размеров? Нет, скорее уж, шарик!

Как движется шарик? Кроме поступательного движения, шарик может вращаться, как волчок. С вращением связан определенный момент количества движения (момент импульса). Величина момента количества движения имеет размерность $\text{г.см}^2/\text{с}$. Для многих, наверное, будет неожиданностью, что такую же размерность имеет знаменитая постоянная Планка, без участия которой не обходится, как мы знаем, ни одна формула квантовой физики.

Обязанный вращению момент количества движения классического твердого тела, естественно, может быть любым и куда угодно направленным. Момент количества движения, или просто момент, – вектор. Вращающийся шарик имеет момент, направленный по оси вращения. Направление оси вращения может быть любым. Классический шарик может вращаться вокруг любой оси – той, вокруг которой ему придали вращение. Если шарик не вращается, то момент его равен нулю.

Вернемся к электрону. Выяснилось, что электрон, протон и нейтрон имеют собственный момент количества движения. Здесь очень важное слово «собственный». Оно означает, что вращение присуще электронам и другим элементарным частицам как их внутреннее неотъемлемое свойство. Вращение электронов нельзя прекратить, как нельзя отобрать у электрона или у протона их заряды. И величину собственного момента количества движения частицы изменить нельзя. Собственный момент количества движения частицы принято называть ее спином.

Повторим: спин – одна из неотъемлемых характеристик частицы. Составляя визитные карточки элементарных частиц (электрона, протона, нейтрона, мезонов, нейтрино и т.д.), перечисляя их характеристики, мы должны назвать не только массу, заряд, но и спин.

Прежде чем привести значения спина электрона, протона, нейтрона и других элементарных частиц, скажем немного о необычном свойстве любого квантового момента количества движения. Так же как квантовая частица не может одновременно иметь определенные значения скорости и координаты, ее момент количества движения не может иметь определенные значения всех своих трех проекции. Это еще одно проявление принципа неопределенности. Квантовая механика допускает, чтобы у момента количества движения были определенными модуль момента, т.е. его длина, и одна из проекций на какую-либо произвольно направленную ось.

Не знаю, как происходило знакомство с квантовой механикой у других, меня поразило очень многое. Пожалуй, больше всего – удивительная логичность и непротиворечивость квантовой механики, казалось бы, нарушающей привычную логику. С интересом читал статьи, посвященные дискуссии между Эйнштейном и Бором. Из конкретных квантовых неожиданностей сильное впечатление на меня произвело пространственное квантование, о котором предстоит рассказать.[3]

Чтобы рассказать о пространственном квантовании, совершим небольшое тактическое отступление: представим себе, что хотим изобразить классический вектор момента количества движения. Как изобразить вектор? Сложность, пожалуй, в том, что способов много. Поступим так: из точки, выбранной для начала координат (эта точка соответствует нулевому вектору), проведем сферу, радиус которой равен величине момента. Вектор момента, проведенный из начала координат, естественно, упирается в сферу. Чтобы зафиксировать направление вектора момента, сферы недостаточно: надо выбрать оси координат. Удобно взять три взаимно ортогональных орта и к ним привязать оси x, y и z. Куда направлять оси координат, безразлично. Это наше дело. Когда выбраны оси координат, направление вектора момента можно задать двумя углами. А можно, конечно, просто задать проекции вектора момента на оси. Сумма их квадратов равна квадрату величины момента.

К каким изменениям приведет квантовая механика? Перечислим по порядку. Как мы уже говорили, одновременно определенные значения имеют длина вектора момента и одна из его проекций, для определенности z-я. Кроме того, длина вектора момента и его проекция могут принимать отнюдь не все значения, а только дискретные.

Проекция момента на ось z принимает следующие значения:

$$-s\hbar, -(s-1)\hbar, \ldots, (s-1)\hbar, s\hbar$$

– всего $2s + 1$ значений. Чтобы $2s + 1$ было целым числом, s должно быть либо целым числом, либо полуцелым. В первом случае число проекций нечетно, а во втором – четно.

Перечисленные утверждения относятся к моменту количества движения любой природы. Когда речь идет об орбитальном моменте, то часто букву s заменяют буквой l.

Главным образом нас будут интересовать собственные моменты количества движения – спины. Прежде всего, спин электрона.

Величиной спина принято считать s, т.е. величину максимальной проекции спина в единицах $\hbar$. Про частицу, у которой максимальная проекция на избранную ось равна $s\hbar$, говорят, что у частицы спин равен s.

Если классический вектор имеет максимально возможную проекцию на какую-либо ось, значит, вектор направлен вдоль этой оси. Его длина, естественно, равна этой проекции. С квантовым спином сложнее. Когда максимальная проекция равна $s\hbar$, квадрат длины вектора спина равен $s(s+1)\hbar^2$. Он больше квадрата максимальной проекции. Причину этого понять легко. Ведь у спина, кроме максимальной, есть две другие проекции. Так как все три не могут иметь определенные значения, то, хотя проекция на избранную ось максимальна, остальные две проекции не равны нулю – они вообще не имеют определенного значения.

Хорошее наглядное представление: спин – вектор, стрелочка. Он крутится вокруг оси. Квантовая механика запрещает спину совпасть с осью. У квантового спина всегда есть отличный от нуля угол отклонения от любой избранной оси (его минимальное значение определяется выписанными выше формулами). Проекция спина вдоль избранной оси имеет определенное значение, а проекция на плоскость всегда «крутится».

Подчеркнем: если изотропия ничем не нарушена, выбор направления оси (ее называют осью квантования) совершенно произволен. А вот если частицу поместить в магнитное поле, то за ось квантования естественно выбрать именно направление вдоль магнитного поля.

Частицы с полуцелым спином называют фермионами – в честь великого итало-американского физика Энрико Ферми. Частицы с нулевым или целым спином называют бозонами – в честь индийского физика Шатьендраната Бозе.

Электроны, протоны и нейтроны – фермионы. У каждой из этих частиц спин равен $1/2$ ($s = 1/2$). Это означает, что спин и электрона, и любого из нуклонов относительно произвольной оси может ориентироваться лишь двумя способами: либо по оси (проекция равна $\hbar/2$), либо против (проекция равна $-\hbar/2$).

У фотона спин равен 1 ($s = 1$). Фотон – бозон. Некоторые мезоны тоже бозоны. Есть среди них частицы с нулевым спином.

Список того, что сейчас принято называть элементарными частицами, включает около 350 наименований. Среди них есть и фермионы, и бозоны. Спины элементарных частиц в большинстве случаев не очень велики. Но все же, просматривая список элементарных частиц (см. 5-й том «Физической энциклопедии»), среди

[3] *Когда я более или менее серьезно изучал квантовую механику, о туннельном эффекте я был наслышан. Поэтому этот наиболее поразительный квантовый феномен не произвел того впечатления, которого заслуживает.*

фермионов я обнаружил две группы частиц со спином $11/2$, а среди бозонов – группы частиц со спином 4. Все кварки – фермионы со спином $1/2$.

Момент количества движения, обязанный движению в пространстве, называют орбитальным, хотя, как мы знаем, квантовая механика не допускает движения по орбите. Орбитальный момент имеет всегда целочисленное значение. Величину максимальной проекции орбитального момента обозначают, как мы говорили, буквой l, а иногда L.

Чем больше момент количества движения, тем он ближе к классическому моменту: с ростом s и $l(L)$ растет число возможных проекций на ось квантования, а длина момента приближается к величине максимальной проекции. Это – проявление общего принципа соответствия, согласно которому формулы и выводы квантовой механики переходят в формулы и выводы классической ньютоновской механики, если характеристики движения соответствуют условиям применимости классической механики. В условия применимости классической механики должна обязательно входить постоянная Планка. Условие того, что момент количества движения можно описывать формулами классической механики, выглядит особенно просто: величина момента должна во много раз превосходить $\hbar$.

Познакомившись с понятием спина, узнав, что электроны – фермионы, продолжим выяснение того, как проявляет себя неразличимость.

Проще и естественнее всего неразличимость изучать на примере двух частиц. Для определенности – на примере двух электронов. Чтобы электроны не разлетелись кто куда, поместим их в поле ядра, имеющего положительный заряд, равный по величине заряду двух электронов. Легко видеть, что получился атом гелия. Так как ядро атома в тысячи раз тяжелее электронов, мы можем считать его неподвижным. Заметьте: неподвижное ядро – абстракция типа идеализации. Но это такой простой случай, что неприлично привлекать к нему внимание. Не учитывая движения ядра, можно получить приближенные, но достаточно точные формулы, описывающие движение электронов (как при классическом описании, так и при квантовом). Правда, аналитически точно решить задачу о движении двух электронов в поле ядра непросто. Но, решив, нетрудно учесть движение ядра и вычислить поправки, обязанные движению ядра. Поправки малы, что подтверждет пригодность приближения.

При классическом описании состояние системы двух электронов определяется траекториями, по которым электроны движутся. При квантовом – волновой функцией (пси-функцией), заданной в конфигурационном пространстве (если состояние стационарно, как движение по определенной замкнутой траектории, то зависимость пси-функции от времени можно исключить).

От какого числа переменных зависит пси-функция двух электронов в стационарном состоянии? Каждый электрон обладает тремя степенями свободы. К трем пространственным координатам каждого электрона надо добавить значение проекции его спина. С учетом спина, у каждого электрона не 3, а 4 степени свободы! А $2 \times 4 = 8$. Волновая функция двух электронов, следовательно, зависит от 8 переменных.[4]

Вернемся к неразличимости. Переставим мысленно местами два электрона. Формально это означает, что в волновой функции, зависящей от восьми переменных, четыре переменных, относящихся к одному электрону, надо поменять местами с четырьмя переменными, относящимися ко второму электрону. Что произойдет при такой операции с волновой функцией двух электронов? Оказывается, волновая функция двух электронов при этом изменит знак. Смена знака есть следствие того, что электроны – фермионы. Все частицы с полуцелым спином ведут себя аналогично. А вот если бы мы переставляли бозоны (частицы с целым или нулевым спином), волновая функция вовсе не изменилась бы.

Естественен вопрос: «Что это за неразличимость, если при перестановке частиц местами волновая функция меняет знак?» Оказывается, процедура вычислений с помощью волновой функции физических величин, описывающих результаты экспериментов, устроена так, что смена знака у волновой функции не влияет на результат. Следовательно, смена знака у пси-функции не противоречит неразличимости.

Сказанное должно пояснить утверждение о различии неразличимостей. Фермионы и бозоны обладают разными неразличимостями и, когда речь идет не об одной частице, разительно не похожи друг на друга. Фермионы – индивидуалисты. А бозоны – коллективисты. Сейчас поясним, что это значит.

Фермионы названы индивидуалистами потому, что смена знака у пси-функции при перестановке двух частиц приводит к принципу запрета, согласно которому в каждом состоянии может находиться лишь один фермион. Бозоны – коллективисты, так как в любом состоянии может скапливаться любое число бозонов.

Принцип запрета, которому подчиняются фермионы, – один из важнейших принципов квантовой физики. По имени сформулировавшего его в 1924–25 годах физика В.Паули принцип запрета называют принципом Паули.

Принцип Паули лежит в основе объяснения структуры атомов и периодического закона Менделеева. Действительно, представьте себе, что ничто не мешает любому числу электронов находиться в одном состоянии. В любом атоме все электроны оказались бы на самом нижнем энергетическом уровне. Атом, который имеет сложную структуру именно потому, что электроны занимают разные состояния, оказался бы бесформенным сгустком электронов, прижатых к ядру (нижний энергетический уровень расположен вблизи ядра). Если бы таково было устройство атома, не могло бы быть никакой надежды объяснить химические свойств различных атомов. А ведь они замечательно объясняются, если при заполнении уровней учитывать требования принципа Паули. Без принципа Паули добавление протона к ядру, означающее переход в соседнюю

[4] *Вас не должно смущать, что одна переменная (проекция спина) принимает только два значения: $+1/2$ и $-1/2$.*

клеточку таблицы Менделеева, почти ничего не изменит в строении атома. А мы знаем, как разительно могут отличаться атомы из соседних клеточек.

Различие свойств атомов с отличающимся числом электронов находит объяснение в положении электронов в атоме. Для понимания свойств атомов надо выяснить, во-первых, что из себя представляют состояния электрона, движущегося в поле, создаваемом ядром и совокупным действием всех электронов, а во-вторых, надо знать, как заполняют электроны атомные состояния.

Энергия электрона в атоме, как легко видеть на примере простейшего атома – атома водорода, принимает дискретные значения (энергетические уровни). Чего мы еще не рассказали, так это того, что состояние электрона характеризуют четыре числа. Три из них описывают орбитальное движение электрона, а четвертое – проекцию спина. От проекции спина обычно энергия электрона почти не зависит. Различием состояний с противоположными спинами в хорошем приближении можно пренебречь, т.е. от роли спина можно абстрагироваться. Итак, решив первую половину задачи, мы знаем расположение энергетических уровней. Это позволяет приступить к заполнению уровней электронами.

Согласно принципу Паули в каждом состоянии может находиться один электрон, а если считать, что от проекции спина электрона энергия не зависит, то на каждом уровне может находиться не более двух электронов, при этом, если их два, они имеют противоположные направления спинов.

Заполняют электроны атомные уровни, руководствуясь требованием того, чтобы энергия была минимальна, но чтобы при этом не нарушался принцип Паули. Атом нейтрален. Значит, число электронов совпадает с числом протонов в ядре атома. Нильс Бор показал, что расположение электронов на атомных уровнях с учетом принципа Паули объясняет химические свойства атомов.

Принцип Паули столь важен, что мы решили показать, как он выводится из антисимметрии волновой функции. Пусть греческие буквы α и β обозначают состояния, а арабские цифры 1 и 2 – наборы четырех величин (трех координат и проекции спина). Тогда антисимметричное (по перестановке частиц) состояние двух электронов, в котором один находится в α-состоянии, а другой в β-состоянии, имеет следующую структуру:

$$\Psi(1,2) = \psi_\alpha(1)\psi_\beta(2) - \psi_\beta(1)\psi_\alpha(2).$$

Ясно, что если состояния совпадают ($\alpha = \beta$), то $\Psi(1,2) \equiv 0$ – в одном состоянии оба электрона находиться не могут.

Теперь спросим себя: верно ли, что неразличимость электронов не позволяет наблюдать и исследовать один электрон? Почти всегда отдельный электрон – идеализация. В обычной жизни и в эксперименте мы имеем дело с огромным коллективом электронов. Их число чаще всего не поддается подсчету. Для того чтобы изучить свойства электрона или с его помощью другой физический объект, мы пытаемся выделить отдельный электрон, прибегая не столько к экспериментальным ухищрениям, сколько к помощи теоретических представлений, основанных на принципе неразличимости, так как уверены, что все электроны ведут себя одинаково.

Пометить электрон нельзя. Но можно попытаться изолировать его от других электронов. Например, локализовать электрон в определенной области пространства. Тогда можно говорить «этот электрон». Существует метод измерения магнитного момента электрона, основанный на резонансном отклике отдельного электрона на высокочастотный сигнал. Для проведения эксперимента в приборе локализуется один (!) электрон. Говорят, лаборант должен следить, чтобы электрон «не сбежал», так как процесс локализации очень труден. Пройдет время, неизбежно возникнет взаимодействие с другими электронами, и этот электрон потеряет свою индивидуальность – превратится в просто электрон.

Другими словами, некоторое время электрон может быть похож на обычный предмет. Но есть кардинальное отличие. Любой предмет (тот же стол, например) тоже может потерять свою индивидуальность – скажем, рассыпаться на щепки, превратиться в труху. При этом он перестанет быть столом. Электрон же, теряющий свою индивидуальность, остается электроном.

Кажется, были попытки построить квантовую электродинамику, в которой есть лишь один электрон, многократно (бесконечнократно) повторяющий себя. Воистину абстрактная теория! К сожалению, не знаю подробностей.

Неразличимость квантовых частиц делает понятия «электрон», «протон»,.. удивительно похожими на математические понятия. Число 5 всегда 5. Можно спросить, 5 – чего, но само число 5 не зависит от того, к чему его относят. Электрон всегда электрон, просто электрон, где бы он ни находился, в чем бы ни участвовал. Мы уже подчеркивали, к элементарной частице не применим вопрос: «Какая из...?» У нее отсутствует индивидуальность, как у многих математических понятий.

Когда бозоны объединяются, они создают более сложную частицу, и частица эта тоже бозон. А вот из фермионов могут получиться либо бозоны, либо фермионы. Если в сложную частицу объединяется четное число фермионов, получается бозон, если нечетное – фермион. Причина проста: у частицы, состоящей из четного числа фермионов, всегда целый или равный нулю спин, а у частицы, состоящий из нечетного числа фермионов, – полуцелый.

Прекрасный пример – два изотопа гелия. У тяжелого, наиболее распространенного изотопа ^{4}He в ядре 2 протона и 2 нейтрона, у легкого, весьма редкого изотопа ^{3}He – 2 протона и 1 нейтрон. В каждом из атомов обоих изотопов 2 электрона. Тяжелый изотоп – бозон, легкий – фермион. Макроскопические свойства изотопов гелия во многом различны.

Абель и его великая теорема

В.ТИХОМИРОВ

Великий норвежский математик Нильс Хенрик Абель (1802 – 1829), прославивший наряду с Григом и Ибсеном свою Родину, прожил недолгую жизнь, полную нужды и страданий. Он умер от чахотки в возрасте двадцати семи лет. Основные открытия в математике были сделаны им в течение всего трех лет. Карл Густав Якоби, творивший в те же годы и шедший в ряде вопросов параллельно с Абелем, писал: «Он ушел от нас, но след, им оставленный, неизгладим». Эти слова оказались пророческими: почти все, что внес в науку Абель, осталось там как сокровище. Преобразование Абеля, признак сходимости Абеля, абелевы группы, интегральное уравнение Абеля, абелевы интегралы – постоянные спутники математиков, и каждому математику известна великая теорема Абеля о неразрешимости уравнений степени выше четвертой в радикалах.

Абель родился 5 августа 1802 года на юге Норвегии. Отец его был священником. В 1815 году отец отправил сына в кафедральную школу в столицу Норвегии Христианию (ныне – Осло). Абелю выпало счастье в этой школе встретить учителя, который сумел заметить и оценить его математическое дарование. Бернт Микель Хольмбое – так звали учителя – заслужил благодарную память о себе тем, что на протяжении многих лет оказывал деятельную поддержку своему выдающемуся, но несчастному ученику. Хольмбое писал: «Абель сочетает в себе гениальные математичесие способности с неистощимым интересом к науке». Изначально рука учителя написала, что «он станет самым выдающимся математиком в мире», и можно думать, что Абель оправдал бы эту высшую характеристику, если бы болезнь не свела его в могилу так рано.

Абель поступил в университет в 1821 году. Отец его умер, и у него не было средств к существованию. Он подал прошение о стипендии, но университет не располагал средствами для этого. Тогда некоторые профессора университета, «дабы сохранить для науки редкое дарование», стали выплачивать ему стипендию из своих средств. Этого было недостаточно для содержания семьи, и Абель стал подрабатывать уроками. Но он так и не избавился от нищеты.

Статья «Доказательство невозможности решения в радикалах общего уравнения выше четвертой степени» была опубликована в 1826 году, и это сразу поставило Абеля в первый ряд математиков мира. Но его следующий мемуар, представленный Парижской академии наук и переданный Коши для рецензирования и представления в печать, затерялся среди бумаг ученого. Коши разыскал его лишь после смерти Абеля. Этот труд Абеля, совместно с трудом Якоби, был удостоен большой премии Академии. Если бы эта премия досталась Абелю при жизни... Но этого не произошло, и все последние годы Абель провел в крайней нужде. Он умер 6 апреля 1829 года.

Якоби сказал о нем: «Абель умер рано, как будто он пожелал сделать лишь то, что другим не под силу, оставив нам доделать остальное».

Коснемся кратко некоторых достижений Абеля в математике.

Исследования Абеля по математическому анализу

Абель впервые стал использовать дискретный аналог интегрирования по частям. Представление суммы произведений двух сомножителей в виде

$$\sum_{k=1}^{N} a_k b_k = a_N B_N - \sum_{k-1}^{N-1} B_k (a_{k+1} - a_k), \qquad (1)$$

где a_k, b_k – заданные числа, $B_k = b_1 + \ldots + b_k$, $1 \le k \le N$, получило название *преобразования Абеля*. Оно стало и остается поныне одним из важных методов классического анализа.

Если применить преобразование Абеля к ряду $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$, предположив, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, а последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ ограничена и монотонна, то получится, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится (из (1) легко извлекается оценка $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k b_k\right| \le 4 \max_{n \le k \le m} |B_k| \max\{|a_n|, |a_m|\}$, и сходимость ряда следует из признака Коши). В этом состоит *признак сходимости Абеля*. Тем же приемом доказывается признак сходимости Дирихле: если последовательность $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ монотонна и стремится к нулю, а последовательность частных сумм $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ограничена, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится.

Эти признаки входят ныне во все учебники по математическому анализу.

Коши ошибочно полагал, что если ряд непрерывных функций, заданных на отрезке, сходится в каждой точке, то он сходится к непрерывной функции. Абель привел контрпример: ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin kx}{k}$ сходится в каждой точке отрезка $[-\pi; \pi]$ (в этом можно убедиться, применив признак Дирихле), но представляемая им функция разрывна в некоторых точках (она равна $\frac{x}{2}$ в интервале $(-\pi; \pi)$, нулю в точках $\pm\pi$ и периодична с периодом 2π, т.е. имеет разрывы в точках $\pi + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \ldots$). Пример Абеля сыграл важную роль в формировании одного из основополагающих понятий анализа – понятия равномерной сходимости последовательности функций.

Ядро Абеля (его еще называют ядром Абеля – Пуассона) – это функция $\frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2}$, $a > 0$, играющая большую роль в анализе и теории вероятностей.

Абель был первым, кому удалось решить интегральное уравнение, т.е. линейное уравнение с «бесконечным числом неизвестных». Это уравнение, получившее его имя, встречается во многих теоретических и прикладных задачах. В частности, с его помощью Риман и Лиувилль ввели понятие производной дробного порядка.

Абель создал начала теории интегрирования функций вида $\int\limits_{H(x,y)=0} R(x, y)\,dx$, где R – рациональная функция (т.е. отношение двух многочленов), а H – многочлен от двух переменных. Вопрос о выражении таких интегралов в элементарных функциях оказался очень глубоким. Ответ содержится в основной теореме, доказанной Абелем, и выражается через топологическую характеристику двумерных многообразий – их род (а именно – род римановой поверхности $H(z, w) = 0$ в двумерном комплексном пространстве). В.И.Арнольд в своей замечательной брошюре «Что такое математика?» (М.: МЦНМО, готовится к печати) объясняет сущность этой теоремы и в заключение пишет: «Удивительна в этой теореме связь совершенно отдаленных на первый взгляд областей математики: теории элементарных функций, интегрирования и топологии».

О разрешимости алгебраических уравнений в радикалах

А теперь расскажем о самом известном достижении Абеля – о его теореме, касающейся разрешимости алгебраических уравнений в радикалах. Эта работа оказала огромное влияние на развитие алгебры, а фактически введенное в ней понятие, получившее впоследствии название *абелевой группы*, лежит в основании теории групп. Теорема Абеля имеет связи с самыми различными областями математики и имеет множество различных доказательств. Мы изложим одно из известных прямых алгебраических доказательств. Это доказательство достаточно элементарно, хотя использует комплексные числа.

Каждый из нас знает формулу для корней квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Поскольку числа $\sqrt[n]{a}$ называют радикалами, говорят, что уравнение $x^2 + px + q = 0$ *разрешимо в радикалах*.

Долгое время искали формулу для корней кубических уравнений. В середине XVI века такая формула была обнаружена. Уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ при любых комплексных a, b, c легко приводится к такому: $x^3 + px + q = 0$, а его решения находятся по формуле Кардано:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

дающей при правильном обращении со значениями кубических корней все три корня кубического уравнения. Итак, для кубического уравнения существует формула, выражающая его корни в радикалах.

Вскоре с помощью формулы Кардано было доказано, что решение всякого уравнения четвертой степени посредством некоторой стандартной процедуры сводится к решению квадратного и кубического уравнений, т.е. и для уравнения четвертой степени тоже существует формула, выражающая его корни в радикалах (квадратных и кубических).

А потом на протяжении почти трех столетий делались безуспешные попытки найти формулу для корней уравнений более высоких степеней. Этим усилиям положила конец доказанная Абелем теорема.

Теорема Абеля

Теорема Абеля. *Ни для какого натурального n, большего четырех, нельзя указать формулу, которая выражала бы корни любого уравнения через его коэффициенты при помощи радикалов.*

Мы докажем здесь несколько больше, а именно, что *существует (конкретное) уравнение пятой степени с целыми коэффициентами, не разрешимое в радикалах.*

Примером служит уравнение

$$p(x)=x^5-4x-2=0.$$

Можно доказать (попробуйте сделать это самостоятельно), что многочлен $p(x)$ нельзя разложить на множители меньшей степени с рациональными коэффициентами (такие многочлены называются неприводимыми – об их свойствах см. Приложение). Неразрешимость в радикалах уравнения $p(x)=0$ следует из такого фундаментального утверждения, доказываемого нами ниже: *если неприводимое уравнение пятой степени разрешимо в радикалах, то оно имеет либо пять, либо лишь один действительный корень.* Докажем, что наше уравнение имеет три действительных корня. Обозначим корни этого уравнения $\{x_k\}_{k=1}^5$. По теореме Виета (см. Приложение), $\sigma_1=\sum_{k=1}^5 x_k=0$ (ибо сумма корней равна коэффициенту при x^4, а он равен нулю). Далее, $\sigma_2=\sum_{1\le k,l\le 5} x_kx_l=0$ (ибо сумма попарных произведений корней равна коэффициенту при x^3, а он тоже равен нулю). Но тогда $s_2=\sum_{k=1}^5 x_k^2=$ $=\sigma_1^2-2\sigma_2=0$, откуда следует, что все пять корней вещественными быть не могут. Значит, имеется комплексный корень $a+bi$. Но тогда число $a-bi$ тоже будет корнем. А с другой стороны, наше уравнение имеет не меньше трех вещественных корней, ибо $p(-2)=-26$, $p(-1)=1$, $p(1)=-5$, $p(2)=22$, и существование трех корней следует из теоремы о промежуточных значениях, принимаемых непрерывной функцией. В итоге мы доказали, что многочлен $p(x)$ имеет ровно три вещественных корня.

(Приведенное доказательство – алгебраическое, и теорема Виета нам понадобится в дальнейшем, но утверждение о том, что приведенное уравнение не имеет пяти вещественных корней, совсем просто доказать аналитически: если бы оно имело пять вещественных корней, то по теореме Ролля производная $p'(x)=5x^4-4$ имела бы четыре вещественных корня, а она имеет только два.)

Доказательство основного утверждения

Пусть $p(x)=x^5+\sum_{k=0}^4 a_kx^k$ (где a_k – рациональные числа) – неприводимый многочлен (т.е. многочлен, не разлагающийся в произведение двух многочленов меньшей степени), разрешимый в радикалах. Это значит, что его корни получаются из совокупности всех дробей присоединением некоторых радикалов. Так например, корни многочлена второй степени получаются присоединением к дробям чисел вида $p_1+p_2\sqrt{a}$, где a – это дробь, не являющаяся квадратом, а корни уравнения $x^3+px+q=0$ получаются присоединением к дробям сначала радикалов $\sqrt{a}$, а затем чисел вида $q_1+q_2\sqrt[3]{c}+$ $+q_3\sqrt[3]{c^2}$, где $c=p_1+p_2\sqrt{a}$. Числа $b+\sqrt{a}$ можно складывать, вычитать, умножать и делить (кроме, разумеется, деления на ноль). Такие числовые образования называются *полями*. Числа вида $q_1+q_2\sqrt[3]{c}+q_3\sqrt[3]{c^2}$, где $c=p_1+p_2\sqrt{a}$, а q_i и p_j – дроби, также образуют поле. Если $p(x)$ разрешим в радикалах, это значит, что к дробям последовательно присоединяются радикалы вида $\sqrt[n_1]{a_1}$ и образуют поле первого ранга R_1, затем присоединяется корень $\sqrt[n_2]{a_2}$, где a_2 принадлежит R_2, и т. д.

Пусть R – числовое поле, получаемое из рациональных чисел присоединением к ним всех радикалов, кроме последнего $r=\sqrt[n]{a}$, где a принадлежит R и $a\ne\alpha^n$ ни для кого α из R. Не ограничив себя в общности, можно считать, что n – простое число (ибо если n – не простое число, то его можно записать в виде $n=n_1p$, где p – простое, после чего присоединить $\sqrt[n_1]{a}=a_1$, а затем и $\sqrt[p]{a_1}$).

По определению, $p(x)$ имеет корень в $\mathrm{R}\left(\sqrt[n]{a}\right)$ (так обозначается поле, полученное присоединением к полю R радикала $\sqrt[n]{a}$). Любое число в $\mathrm{R}\left(\sqrt[n]{a}\right)$ представимо как многочлен степени $n-1$ от r с коэффициентами из R (см. Приложение). Мы пользуемся здесь тем, что если R – числовое поле и $r=\sqrt[n]{a}$, где n – простое число, $a\ne\alpha^n$ для α из R, то любой элемент x из $\mathrm{R}\left(\sqrt[n]{a}\right)$ единственным образом представим в виде $x=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_kr^k$. Этот факт нетрудно доказать непосредственно.

Итак, пусть x_1 – вещественный корень полинома $p(x)$ (а у полинома пятой степени один вещественный корень обязательно существует – это следует из уже упоминавшегося свойства непрерывной функции принимать все промежуточные значения; полином пятой степени с положительным старшим коэффициентом при стремлении x к плюс бесконечности стремится к плюс бесконечности, т.е. становится положительным, аналогично, при отрицательных x он становится отрицательным, значит, он имеет ноль). Представим x_1 в виде $x_1=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_kr^k$ с коэффициентами из R. Пусть $\varepsilon=e^{2\pi i/n}$ – первообразный корень из единицы и $x_k=\sum_{j=0}^{n-1}\alpha_j\varepsilon^{(k-1)j}r^j$, $1\le k\le n$. Получили n чисел из

$\mathrm{R}\left(\sqrt[n]{a}\right)$. Рассмотрим полином

$$q(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - \ldots + (-1)^n \sigma_n.$$

Тогда $\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} x_k = n\alpha_0$, т.е. второй коэффициент полинома $q(x)$ принадлежит полю R. Далее, произведя возведение в квадрат, убедимся, что $s_2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$ – число из R, откуда из формулы (которой мы пользовались уже) $s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$ (и из равенства $\sigma_1 = s_1$) получаем, что третий коэффициент полинома q тоже принадлежит R. Предлагаем читателю проверить, что так будет и дальше: все коэффициенты полинома q являются числами из R (если читатель захочет доказать это самостоятельно, он должен будет ознакомиться с формулой Ньютона, выражающей σ_k как полиномы от $s_1, \ldots, s_k$).

Отметим, что если какой-то полином $P(x)$ имеет корень r, то он имеет корнем и $\varepsilon^k r$. Действительно, полиномы P и $Q(x) = x^n - a$ имеют общий корень, а Q неприводим, значит, P делится на Q, т.е. *все* x_k *являются корнями* $P(x)$.

Более того, можно доказать, что если *неприводимый* полином P *простой* степени n становится приводимым при присоединении радикала степени k, где k – тоже простое число, то $k = n$. Мы не будем приводить здесь чисто техническое доказательство этого факта. Отсюда можно получить, что многочлен $q(x)$ является степенью многочлена $p(x)$. Но так как степени этих многочленов простые числа, то n (степень q) делится на 5, а так как n – простое число, то $n = 5$ и многочлены p и q просто совпадают.

Итак,

$$p(x) = (x - x_1)\ldots(x - x_5),$$

x_1 – вещественное число, а

$$x_k = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon^{k-1} r + \ldots + \alpha_4 \varepsilon^{4(k-1)} r^4, \quad r = \sqrt[5]{a}, \quad 1 \le k \le 5.$$

При этом можно считать, что число ε присоединено к R, ибо $\sqrt[5]{1}$ выражается через биквадратные радикалы (построение правильного пятиугольника циркулем и линейкой осуществимо!).

Возможны два случая: 1) a – вещественное число; 2) a невещественно.

Рассмотрим первый случай. В силу того, что $\varepsilon \in \mathrm{R}$, можно считать, что r само вещественно. Мы обозначили через x_1 вещественный корень полинома p. Тогда $x_1 = \alpha_0 + \alpha_1 r + \ldots + \alpha_4 r^4$, значит, $x_1 = \overline{x}_1 = \overline{\alpha}_0 + \overline{\alpha}_1 r + \ldots + \overline{\alpha}_4 r^4$ (через $\overline{c}$ обозначается, как обычно, число, комплексно сопряженное с c), и из единственности представления корней получаем, что все α_i вещественны. Но тогда все остальные корни комплексны. Докажем это, например, для x_2. Имеем: $x_2 = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon r + \ldots + \alpha_4\varepsilon^4 r^4$, тогда $\overline{x}_2 = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon^4 r + \ldots + \alpha_4 \varepsilon r^4$. Если допустить, что $x_2 = \overline{x}_2$, то получилось бы (снова из единственности представления), что $\alpha_1\varepsilon = \alpha_1\varepsilon^4$, т.е. $\alpha_1 = 0$, аналогично, $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, что невозможно.

Теперь разберем второй случай, когда a имеет модуль ρ и аргумент $\varphi \ne 0$ и можно считать, что $r = \sqrt[5]{\rho}\, e^{i\varphi/5}$. Положим $R = \sqrt[5]{\rho^2}$. Тогда $\overline{r} = \frac{R}{r}$. И снова открываются две возможности: а) присоединение R ведет к разложению p; б) присоединение R не ведет к разложению p. В первом случае (так как R вещественно) дело сводится к предыдущему, и, значит, p имеет единственный вещественный корень. Остался случай б). Тогда

$$x_1 = \alpha_0 + \alpha_1 r + \ldots + \alpha_4 r^4 = \overline{x}_1 = \overline{\alpha}_0 + \overline{\alpha}_1\overline{r} + \ldots + \overline{\alpha}_4\overline{r}^4 = \frac{r^5}{a}\left(\overline{\alpha}_0 + \overline{\alpha}_1\frac{R}{r} + \ldots + \overline{\alpha}_4\frac{R^4}{r^4}\right) = \overline{\alpha}_0 + \overline{\alpha}_4\frac{R^4}{a} r + \ldots + \overline{\alpha}_1\frac{R}{a} r^4,$$

откуда в силу единственности представления x_1 приходим к равенствам

$$\alpha_0 = \overline{\alpha}_0, \quad \alpha_1 = \overline{\alpha}_4\frac{R^4}{a},$$

$$\alpha_2 = \overline{\alpha}_3\frac{R^3}{a}, \quad \alpha_3 = \overline{\alpha}_2\frac{R^2}{a}, \quad \alpha_4 = \overline{\alpha}_1\frac{R}{a}. \qquad (2)$$

А из этих соотношений легко доказать уже, что остальные x_k вещественны. Докажем это, к примеру, для x_2. Имеем:

$$x_2 = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon r + \ldots + \alpha_4\varepsilon^4 r^4,$$

значит,

$$\overline{x}_2 = \alpha_0 + \overline{\alpha}_1\overline{\varepsilon}\overline{r} + \ldots + \overline{\alpha}_4\overline{\varepsilon}^4\overline{r}^4 = \alpha_0 + \alpha_4\frac{R^4}{a}\varepsilon r + \ldots + \alpha_1\frac{R}{a}\varepsilon^4 r^4 = x_2.$$

Итак, либо все корни p вещественны, либо только один. А уравнение $x^5 - 4x - 2 = 0$ имеет три вещественных корня. Значит, корни этого уравнения выразить в радикалах нельзя. Теорема Абеля доказана.

Приложение

1. Числовое поле. Это множество K чисел (действительных или комплексных), содержащее 1 и 0, а также вместе с любыми двумя числами a и $b \ne 0$ их произведение, сумму, разность и частное, т.е. результат любых арифметических действий над этими числами.

Множества $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел, $\boldsymbol{C}$ всех комплексных чисел, $\boldsymbol{Q}$ рациональных чисел, а также множества чисел вида $a + bi$ ($a \in \boldsymbol{Q}, b \in \boldsymbol{Q}$), $a + b\sqrt{2}$, $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ являются полями.

2. Неприводимые многочлены. Многочлен $p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ с коэффициентами, принадлежащими некоторому числовому полю K, называется неприводимым над этим полем, если он не раскладывается на два множителя ненулевой степени с коэффициентами из этого поля. В частности, любой многочлен первой степени неприводим. Отметим, что при $n > 1$ неприводимый над полем K многочлен не имеет корней, принадлежащих полю K. Неприводимые многочлены во многом аналогичны простым числам. В частности, можно доказать теорему, аналогичную основной теореме арифметики:

Всякий многочлен может быть единственным образом (с точностью до постоянных сомножителей) разложен в произведение неприводимых многочленов.

Кроме того, если многочлен $P(x)$ с коэффициентами из поля K имеет с неприводимым многочленом $Q(x)$ общий корень (не принадлежащий полю K), то $P(x)$ делится на $Q(x)$.

3. Расширение поля. Пусть K – некоторое числовое поле, $P(x)$ – неприводимый многочлен степени n над полем K, а α – корень (вообще говоря, комплексный) этого многочлена. Как было уже отмечено, $\alpha \notin K$. Обозначим через $K(\alpha)$ множество всех чисел вида $c_0 + c_1\alpha + \ldots + c_{n-1}\alpha^{n-1}$, где $c \in K$. Нетрудно доказать, что $K(\alpha)$ является полем. Поле $K(\alpha)$ называется простым алгебраическим расширением поля K.

Например, присоединяя к полю $\boldsymbol{Q}$ число $\sqrt{2}$, получаем поле $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$, присоединяя к $\boldsymbol{Q}$ число $\sqrt[3]{2}$, получаем поле $\boldsymbol{Q}(\sqrt[3]{2})$.

Поле комплексных чисел $\boldsymbol{C}$ получается как расширение $\boldsymbol{R}(i)$ присоединением к полю $\boldsymbol{R}$ действительных чисел корня i многочлена x^2+1. Комплексные числа имеют вид $x + iy$, где x и y – действительные числа, а $i^2 = -1$, и изображаются точками на плоскости xOy. Их можно представлять в тригонометрической форме: $x + iy = \sqrt{x^2+y^2}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $0 \le \varphi < 2\pi$ – угол, образуемый положительным направлением оси Ox и лучом, проходящим через начало координат и точку $(x; y)$, отсчитываемый против часовой стрелки. Для сокращения записи мы используем формулу Эйлера $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$, удобную при перемножении и возведении в степень:

$$e^{i\varphi}\cdot e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}, \quad \left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi}.$$

Расширение $K(\alpha)$ поля K называется радикальным, если оно получается присоединением корня неприводимого над полем K уравнения $x^n = a$, т.е. числа $\sqrt[n]{a}$, не принадлежащего полю K.

Решить уравнение $P(x) = 0$ в радикалах – значит построить цепочку последовательных радикальных расширений поля $\boldsymbol{Q}$: $\boldsymbol{Q} \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_l$ рациональных чисел так, чтобы последнее поле в этой цепочке содержало корни многочлена P.

Например, решение квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, где $p \in \boldsymbol{Q}$, $q \in \boldsymbol{Q}$, сводится к построению поля $\boldsymbol{Q}(\sqrt{D})$, где $D = p^2 - 4q$. Решение кубического уравнения $x^3 + px + q = 0$, в силу формулы Кардано, сводится к последовательному присоединению к полю $\boldsymbol{Q}$ чисел $\sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}$, а затем и чисел $\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$, $\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$.

Несколько более сложно строится расширение, содержащее корни произвольного неприводимого многочлена четвертой степени.

Наличие формулы, выражающей корни уравнения степени n в радикалах, означает, что для всех многочленов данной степени существует единая схема (одинаковая для всех многочленов) построения цепочки таких расширений, дающая в конце концов возможность записать корни в виде

$$x = f(a_0, a_1, \ldots, a_n),$$

где функция f получается из коэффициентов с помощью конечного числа сложений, вычитаний, умножений, делений и извлечения корней.

4. Теорема Виета. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – корни многочлена

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Тогда

$$p(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n).$$

Раскрывая скобки и приравнивая коэффициенты, получаем, что

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_1}{a_0},$$

$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_2}{a_0},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sigma_k = x_1x_2\ldots x_k + x_1x_3x_4\ldots x_{k+1} + \ldots$$

$$\ldots + x_{n-k+1}\ldots x_n = (-1)^k\frac{a_k}{a_0},$$

$$\sigma_n = (-1)^n\frac{a_n}{a_0}$$

(здесь σ_k – сумма всевозможных произведений по k различных чисел из набора корней $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$). Функции $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$ называются основными симметрическими многочленами от $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

5. Теорема о симметрических функциях. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ – симметрический многочлен с коэффициентами из некоторого поля K, т.е. многочлен, не меняющийся при любых перестановках $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда существует многочлен с коэффициентами над полем K такой, что

$$f(x_1, \ldots, x_n) = P(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n).$$

Тем самым всякий симметрический многочлен от корней многочлена есть многочлен от его коэффициентов.

В частности, степенные суммы, т.е. выражения вида

$$S_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k,$$

выражаются через коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Соответствующие формулы называются формулами Ньютона. Мы их здесь не приводим, так как нам нужен сам факт, а не конкретный вид этих формул.

С другим доказательством теоремы Абеля можно ознакомиться по книге В.Б.Алексеева «Теорема Абеля в задачах и решениях» (М.: МЦНМО, 2001).

«КВАНТ» УЛЫБАЕТСЯ

Такая задачка...

– Я сдаю жилплощадь по цене 10 центов, или 0,1 доллара, за квадратный метр, – объявила хозяйка обратившемуся к ней математику.

– Прекрасно, – обрадовался клиент, – но я хотел бы поселиться на этой жилплощади вместе со своей тещей.

– Ах, вот как! В таком случае ставка возводится в квадрат. Вы должны будете платить не 10, а 100 центов за квадратный метр.

– Но, позвольте! – возразил математик. – В таком случае вместо прежней цены 0,1 я должен буду платить всего лишь $(0,1)^2 = 0,01$ доллара за квадратный метр!

Сколько на самом деле должен платить математик?

М. Наумов

«...О приятном рассмотрении криволинейных фигур»

А.ВАСИЛЬЕВ

Великий немецкий ученый Готфрид Вильгельм Лейбниц – одна из наиболее ярких фигур в истории мировой науки. Его вклад в развитие идей современной математики получил всеобщее признание. Наряду с Ньютоном Лейбниц делит славу открытия анализа бесконечно малых величин, является создателем дифференциального и интегрального исчислений, причем сами эти термины введены Лейбницем, им же предложена и символика для обозначения дифференциалов и интегралов.

Но деятельность Лейбница не ограничивалась только математикой. Он внес значительный вклад в развитие механики и физики, являлся одним из крупнейших философов нового времени, занимался логикой, юриспруденцией, историей и теологией, выдвинул ценные идеи в геологии, языкознании и психологии, был причастен к горному, монетному и библиотечному делу, изобретал различные устройства, в том числе счетную машину, был публицистом, политиком и дипломатом, организовывал академии наук, ставил химические опыты и интересовался медициной. Не везде он достиг таких вершин, как в философии или математике, но то, что им сделано, сохраняет и по сей день непреходящий интерес.

Лейбниц родился 21 июня (3 июля по новому стилю) 1646 года в семье профессора морали Лейпцигского университета. В 15 лет он поступил на юридический факультет того же университета и в 1666 году окончил его, проучившись, кроме того, один семестр в Йене у знаменитого тогда немецкого математика Я.Вейгеля. По возвращении из Йены Лейбниц получил звание магистра философии, а затем бакалавра юриспруденции, что означало окончательное овладение специальностью юриста. Но Лейбниц хотел пойти дальше. В юриспруденции он увидел пункты соприкосновения с математикой и логикой.

Уехав в 1666 году в Нюрнберг, Лейбниц становится доктором права, одновременно увлекаясь алхимией. Затем, уже в Майнце, он выступает с первыми самостоятельными работами в области естествознания, где излагает свои представления о телах, их свойствах, пространстве и времени, о движении и силах и начинает работать над счетной машиной.

В 26 лет Лейбниц переселяется в Париж. Здесь он лично знакомится с известными французскими учеными, в том числе с Х.Гюйгенсом, здесь начинается наиболее активный и плодотворный период его математического творчества. Гюйгенс знакомит Лейбница с работами Декарта, Галилея, Торричелли, Паскаля. Во время поездки в Лондон в 1672 году Лейбниц знакомится с английскими математиками, встречается с Ньютоном, становится членом Лондонского Королевского общества. В парижский период у Лейбница сформировались основные идеи дифференциального и интегрального исчислений. К этому открытию Лейбниц был подготовлен знанием того, что было сделано его предшественниками в течение столетия, его собственными результатами и тем сочетанием проницательности, изобретательности и стремления к обобщениям, которое было характерно для его мышления.

Не прибегая к математической символике, открытие Лейбница можно описать следующим образом. Два широких класса задач были предметом исследования математиков XVII века. Один из них составлял так называемые квадратуры – задачи на вычисление площадей фигур со сложными криволинейными границами («криволинейных фигур»), а также объемов и положений центров тяжестей таких тел. Общим во всех этих задачах было то, что их можно было решать по единому плану: сначала, как при приближенном вычислении площади криволинейной фигуры, составлять сумму конечного числа легко вычисляемых слагаемых, затем увеличивать число слагаемых до бесконечности и таким образом, если удается, находить точный результат. Методы вычисления квадратур предлагались разные, они были приспособлены для решения определенного круга задач или сводились к приему, обеспечивающему успех только в некоторых случаях. При этом высоко ценили именно частные методы, а стремление выявить то общее, что было в этих методах, отнюдь не преобладало. К тому же не было достаточной системы понятий и обозначений, чтобы удобным образом выразить и математически записать это общее.

Другой класс задач – это задачи на проведение касательных. Чтобы дать правило построения касательной к заданной кривой в определенной точке, надо указать направление касательной. Для окружности, как известно, этот вопрос решается весьма просто, потому что касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания. Для некоторых кривых их геометрические свойства тоже позволяют дать удобное правило для построения касательной. В общем случае касательную получают как предельное положение секущей, проведенной через две точки кривой. При этом одну из точек пересечения кривой приближают ко второй, неподвижной; секущая как бы вращается вокруг неподвижной точки, превращаясь, при слиянии обеих точек, в касательную. Следить надо за углом, который секущая образует с фиксированным направлением (осью Ox), он определяет направление секущей. Вычислять этот угол удобно по его тангенсу, а тангенс находится по отношению разностей координат Δy и Δx рассматриваемых точек. Когда подвижная точка перемещается по кривой, каждый из этих отрезков неограниченно уменьшается, но их отношение $\Delta y/\Delta x$ при этом приближается к определенному значению – тангенсу угла касательной с направлением Ox. Задание кривой означает задание зависимости между абсциссой и ординатой ее точек. Таким образом, в общем случае для проведения касательной надо уметь вычислять, во что превратится отношение $\Delta y/\Delta x$, когда Δx стремится к нулю и, вследствие этого, Δy тоже стремится к нулю.

К этой общей схеме сводится не только проведение касательных к кривым линиям, но и решение ряда других вопросов, например определения скоростей в механике, нахождения наибольших и наименьших значений изменяющихся величин и т.п. Все это знали в XVII веке и до Ньютона и Лейбница, умели решать до конца многие задачи этого класса, дошли до понимания того общего, что есть в них, но опять-таки еще не нашли системы понятий и обозначений для этого общего. Предшественниками Лейбница даже была установлена связь между обоими классами задач, но это еще не послужило основанием для объединения методов решения задач обоих классов в нечто единое.

Открытие Лейбница состояло в том, что он сумел восполнить все указанные пробелы в математическом анализе XVII века. Он дал общие схемы решения задач на квадратуры и касательные, введя таким образом в качестве самостоятельных операций то, что теперь называют интегрированием и дифференцированием. Он показал в достаточно общем виде связь между этими двумя операциями – то, что одна из них является обратной по отношению к другой. Идя от общего к частному, он установил правила для дифференцирования и интегрирования, вобравшие в себя те приемы и методы, которые были даны до него. Он придумал целесообразные обозначения для введенных им операций, которыми пользуются и поныне. Он стал, таким образом, создателем дифференциального и интегрального исчислений. Несколько позже их объединили под названием анализа бесконечно малых. Лейбниц смог почти сразу показать, что новые исчисления не только проще приводят к известным результатам, но и облегчают получение новых.

Попутно Лейбниц пришел к уточнению и расширению такого важного научного понятия, как функция (функциональная зависимость). Он же ввел термины «алгебраический» и «трансцендентный» (для описания кривых, уравнения которых в декартовых координатах не могут быть записаны в алгебраической форме; таковы, например, графики тригонометрических функций). Этими терминами математики пользуются до сих пор.

Позже, в 1690-х годах, Лейбниц посвятил немало сил отстаиванию своего приоритета в создании дифференциального и интегрального исчислений, так как алгоритм анализа бесконечно малых почти на 10 лет раньше Лейбница разработал Ньютон, но он опубликовал свое открытие много позже Лейбница. Ныне можно считать бесспорно установленной полную независимость открытия Лейбница от исследований Ньютона.

Лейбницем были получены разнообразные новые результаты. Некоторые из них относятся к технике дифференцирования – нахождение дифференциалов различных рациональных и иррациональных алгебраических функций, синуса и арксинуса, логарифма и пр., а также формула для дифференциала любого порядка от произ-

ведения функций. Другая группа результатов Лейбница относится к дифференциальной геометрии – введение огибающей семейства плоских кривых, зависящих от некоторого параметра. Третью группу достижений Лейбница объединяют результаты по интегральному исчислению.

В силу особенности характера, Лейбниц не мог подолгу заниматься только одним делом. Так, помимо математики он увлекался механикой – в частности, искал и, пусть в несовершенной форме, нашел один из основных законов сохранения, подошел к формулировке первого вариационного принципа механики. В результате знакомства с современными ему физическими исследованиями он стал приверженцем эксперимента, заявив в одном из писем своего парижского периода, что его «манера» исследования физических вопросов прежде всего требует составления «каталога» необходимых опытов. И в публикациях, и в переписке, и в рукописях Лейбниц разбросал немало замечательных идей, коснувшись едва ли не всех проблем механики и физики своего времени.

Одновременно с научными занятиями Лейбниц почти 40 лет жизни провел на службе у ганноверских герцогов в должностях придворного советника, заведующего библиотекой, историографа. Им написана история германских герцогств с замечательным предисловием о прошлом Земли – горообразовании, появлении морей и океанов. Для сбора исторических материалов Лейбниц совершил длительное (1687–1690) путешествие по южной Германии, Австрии и Италии. В Торгау Лейбниц познакомился с Петром I. Эта и две последующие встречи породили оживленную переписку между Петром и Лейбницем по самым разным вопросам общественной жизни, науки и политики. Петр даже принял Лейбница на русскую службу в звании тайного советника юстиции.

Скончался Лейбниц в 1716 году и похоронен на ганноверском кладбище. Он вошел в историю науки как человек большого масштаба и разнообразных дарований.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 мая 2003 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №1– 2003» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1846» или «Ф1853». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1852 и М1853 предлагались на Санкт-Петербургской математической олимпиаде 2002 года.

Задачи М1846—М1855, Ф1853—Ф1862

М1846. Докажите, что для любого натурального n и любого натурального $k \le n$ выполняется неравенство

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^k \le 1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}.$$

В.Орлов (ученик 10 кл.)

М1847. В 8 банках сидят 80 пауков. Разрешается выбрать любые две банки, суммарное число пауков в которых четное, и пересадить часть пауков из одной банки в другую, чтобы их стало поровну. При любом ли начальном распределении пауков в банках с помощью нескольких таких операций можно добиться того, чтобы в каждой банке оказалось одинаковое число пауков?

В.Каскевич

М1848. В треугольник ABC вписана окружность с центром O, которая касается сторон в точках A_1, B_1, C_1 (рис.1). Отрезки AO, BO, CO пересекают окружность в точках A_2, B_2, C_2. Докажите, что площадь треугольника $A_2B_2C_2$ равна половине площади шестиугольника $B_1A_2C_1B_2A_1C_2$.

В.Произволов

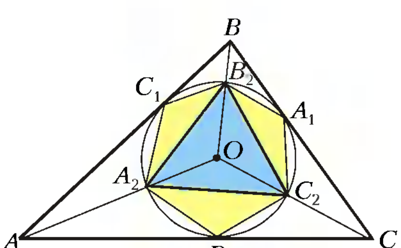


Рис.1

М1849. Простое число p удовлетворяет равенству

$$p^2 = 2^n \cdot 3^m + 1,$$

где n и m – целые неотрицательные числа. Докажите, что $p \le 17$.

В.Сендеров

М1850. Числа натурального ряда от 1 до $n(n+1)$ записаны последовательно красным и синим цветами в следующий очередности. Первые n чисел – красные, затем одно – синее, затем $n-1$ чисел – красные, затем два – синие и т.д., наконец, одно число – красное и последние n чисел – синие. Таким образом, убывающие по численности группы красных чисел перемежаются возрастающими по численности группами синих чисел. Докажите, что сумма синих чисел вдвое больше суммы красных чисел.

В.Произволов

М1851. Нарисованы координатные оси Ox, Oy и график функции $y=\frac{1}{8x}$. Масштаб не указан. Пользуясь только циркулем, постройте точку $(1;\ 1)$.

С.Токарев

М1852. Дано натуральное число n. В интервале $(n^2;\ n^2+n)$ выбраны различные натуральные числа a и b. Докажите, что в этом интервале нет натуральных делителей числа ab, отличных от a и b.

С.Иванов

М1853. С числом разрешается производить следующие операции:

1) возвести в любую натуральную степень;
2) отрезать последние две цифры, умножить образованное ими число на 3 и прибавить к числу, образованному остальными цифрами.

Можно ли с помощью таких операций из числа 81 получить число 82?

К.Кохась

М1854*. Пусть $f(x)$ – многочлен степени $m \ge 2$ с целыми коэффициентами. Докажите, что множество значений многочлена $f(x)$ в целых точках содержит бесконечную геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда $f(x)=a(bx+c)^m$ (здесь a, b, c – целые числа, $a \neq 0$, $b \neq 0$).

Н.Осипов

М1855. Плоскости, параллельные граням прямоугольного параллелепипеда, разрезали его на меньшие параллелепипеды, которые окрасили в черный и белый цвета в шахматном порядке. Известно, что суммарный объем черных равен суммарному объему белых параллелепипедов. Докажите, что из черных можно составить параллелепипед P, а из белых можно составить параллелепипед Q так, что P и Q будут равны.

В.Произволов

Ф1853. В большой комнате на гладком горизонтальном твердом полу стоит кровать. Одна ее ножка чуть короче других, поэтому под нее пришлось подложить гладкий брусок. Оказалось, что трение совсем мало и брусок этот легко выбить – маленький упругий шарик, который пускают по полу со скоростью больше 1 м/с, с этим справляется. Задачу злоумышленнику усложнили – он может бросать шарик с уровня пола на расстоянии 3 м от бруска, а посредине между ним и бруском поставили ширму высотой 0,5 м. С какой минимальной скоростью нужно (вернее – не нужно!) бросить шарик, чтобы выбить брусок?

П.Коренев (ученик 10 кл.)

Ф1854. Петер и Пауль неторопливо бегают по футбольному полю (кажется, где-то в Баварии), причем расстояние между ними все время равно 50 м. Петер с постоянной по величине скоростью 2 м/с бегает по кругу радиусом 50 м, а Пауль бежит по прямой, проходящей через центр этого круга. Найдите максимальные значения скорости и ускорения Пауля. Считайте, что подолгу он на одном месте не стоит.

А.Фанатов

Ф1855. В системе на рисунке 2 все блоки невесомые, а нити невесомые и нерастяжимые. Считая массы всех грузов одинаковыми, найдите ускорения блоков. Свободные концы всех нитей вертикальны.

А.Блоков

Ф1856. Из тонкой жесткой проволоки согнули угол 90°, одну из сторон угла закрепили в вертикальном положении, другую – в горизонтальном (рис.3). На каждую из сторон надели маленькую шайбу массой M и соединили шайбы легким стержнем длиной L. Вначале этот стержень почти вертикален, затем от малого толчка система приходит в движение. Найдите максимальные скорости каждой из шайб. Трение отсутствует.

Р.Александров

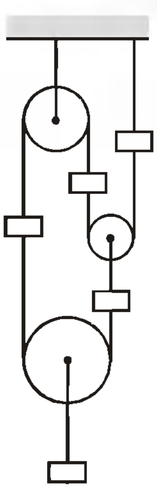


Рис.2

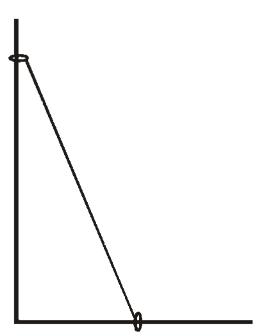


Рис.3

Ф1857. По гладкому горизонтальному столу скользит шайба и налетает на точно такую же неподвижную шайбу, едва ее коснувшись. После удара первая шайба отклонилась от первоначального направления на угол 1°, вторая шайба после удара стала двигаться под углом 80° к этому направлению. Какая часть начальной кинетической энергии системы перешла при ударе в тепло?

А.Простов

Ф1858. В теплоизолированном сосуде находится N молекул двухатомного газа при температуре T_1. При этих условиях начинается диссоциация молекул, которая практически прекращается при падении температуры в сосуде до T_2. При диссоциации одной молекулы поглощается энергия ε. Какая часть молекул продиссоциирует, и во сколько раз упадет давление в сосуде?

З.Рафаилов

Ф1859. Две медные монеты диаметром 1 см и толщиной 1 мм расположены на расстоянии 1 м друг от друга, причем плоскости монет перпендикулярны прямой, соединяющей их центры. На монеты наносят электрические заряды. Какими должны быть знаки зарядов и каково должно быть отношение их величин, чтобы сила взаимодействия между монетами упала до нуля? Интересный случай нулевых зарядов можете не рассматривать.

А.Повторов

Ф1860. К батарейке подключают «мостик», состоящий из пяти резисторов. Четыре из этих пяти резисторов имеют сопротивление R. Каким должно быть сопротивление пятого резистора, чтобы силы токов через какие-нибудь два резистора в схеме оказались одинаковыми и ни один из токов не был нулевым?

А.Зильберман

Ф1861. К батарейке напряжением 12 В подключают последовательно соединенные конденсатор емкостью 1 мкФ и катушку индуктивностью 1 Гн. В тот момент, когда ток через катушку максимален, параллельно ей подключают резистор сопротивлением 1 МОм, а когда ток через катушку снова становится максимальным и течет в ту же сторону, резистор отключают. Какое количество теплоты выделится при этом в резисторе? Какой заряд через него протечет?

Р.Катушкин

Ф1862. От шара радиусом 10 см, сделанного из органического стекла, осторожно отпиливают два маленьких кусочка так, что получаются две плосковыпуклые линзы – диаметр первой 1 см, диаметр второй вдвое больше. Линзы аккуратно склеивают плоскими поверхностями, как по-

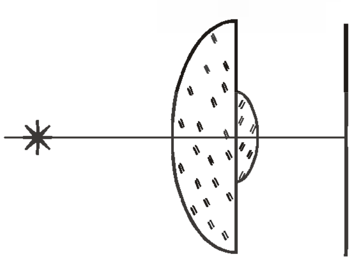


Рис.4

казано на рисунке 4. На главной оптической оси получившейся системы на расстоянии 1 м от нее помещают точечный источник света, а с другой стороны системы – экран. Как нужно расположить экран, чтобы освещенное пятно на нем имело минимальный диаметр? Чему он равен?

А.Очков

Решения задач М1826—М1830, Ф1838—Ф1847

М1826. *Про положительные числа a, b, c известно, что* $1/a+1/b+1/c \geq a+b+c$. *Докажите, что* $a+b+c \geq 3abc$.

Умножая неравенство $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq a+b+c$ на общий знаменатель, получаем равносильное неравенство $bc+ac+ab \geq (a+b+c)abc$.

Теперь докажем вспомогательное неравенство $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$:

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq 2(ab+bc+ca) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \geq 3(ab+bc+ca) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca).$$

Отсюда легко получаем требуемое неравенство:

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \geq 3(a+b+c)abc,$$
$$a+b+c \geq 3abc.$$

С.Злобин

М1827. *Пусть Q – произвольная точка окружности с диаметром AB, QH – перпендикуляр, опущенный на AB (рис.1). Точки C и M – это точки пересечения окружности с центром Q и радиусом QH с первой окружностью. Докажите, что прямая CM делит радиус QH пополам.*

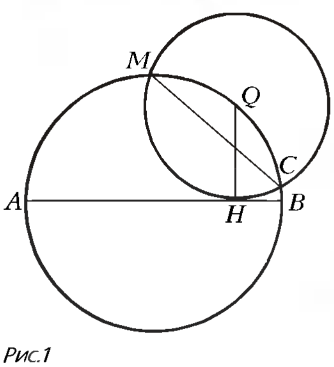


Рис.1

Проведем прямые CH и MH до пересечения с окружностью в точках F и R соответственно (рис.2). Тогда $\angle MCF = \frac{1}{2} \cup MF = \angle MRF$ и $\angle MCF = \angle MHA$, так как AH – касательная; значит, $\angle RHB = \angle HRF$, или $AB \parallel FR$. В ΔHRW угол $\angle HWR = \frac{1}{2} \cup QR = \angle QMH$, но $\angle QMH = \angle QHM$ ($MQ = QH$), т.е. ΔHRW – равнобедренный и RI – высота в ΔHRW ($I = HW \cap RF$). Получим, что $HI = IW$, $QH = HW$. Пользуясь результатом задачи «Проблема бабочки», видим, что $IH = HL = IW = LQ$, что и требовалось доказать. (О «бабочках» см., например, книгу: Г.С.Коксетер, С.Л.Грейтцер «Новые встречи с геометрией».)

В.Дубов

М1828. *А, Б, В, Г и Д собирают почтовые марки. У А – более 3/4 марок Б, у Б – более 3/4 марок В, у В – более 3/4 марок Г, у Г – более 3/4 марок Д, у Д – более 3/4 марок А. Докажите, что есть марка, которая имеется у каждого филателиста.*

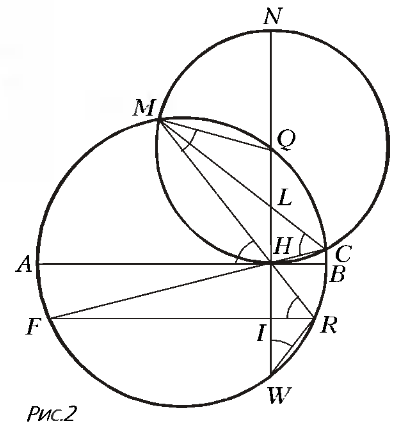


Рис.2

Сначала переведем условие задачи на язык конечных множеств. Имеется пять конечных множеств A, $Б$, $В$, $Г$ и $Д$; обозначим $A \cap Б = Б_1$, $Б \cap В = В_1$, $В \cap Г = Г_1$, $Г \cap Д = Д_1$ и $Д \cap A = A_1$. Также будем обозначать через $|X|$ количество точек (мощность) множества X. Известно, что $|Б_1| > \frac{3}{4}|Б|$, $|В_1| > \frac{3}{4}|В|$, $|Г_1| > \frac{3}{4}|Г|$, $|Д_1| > \frac{3}{4}|Д|$ и $|A_1| > \frac{3}{4}|A|$. Нужно доказать, что пересечение пяти множеств $A \cap Б \cap В \cap Г \cap Д$ не пусто.

Докажем это методом улитки, ползущей по склону Фудзи. Полагаем для определенности, что множество A имеет максимальную мощность. Схема доказательства будет такой. По условию множество $Д$ «толсто» пересекается с множеством A. Затем мы обнаруживаем, что три множества $Г$, $Д$ и A имеют тоже достаточно «толстое» пересечение. Далее видим, что четыре множества $В$, $Г$, $Д$ и A имеют пересечение еще достаточно «толстое» для того, чтобы оно пересекалось непременно и с множеством $Б$.

Но все по порядку. В силу того, что $|A|$ максимально, а множества $Д_1$ и A_1 содержатся в $Д$, нетрудно убедиться в справедливости неравенства для множества $F = Д_1 \cap A_1$: $|F| > \frac{1}{2}|A|$. При этом $F \subset Г \cap Д \cap A$.

Множества F и $Г_1$ содержатся в $Г$, а $|Г_1| > \frac{3}{4}|Г|$, значит, множество $G = F \cap Г_1$ таково, что $|G| > \frac{1}{4}|A|$. Далее, множества G и $В_1$ содержатся в $В$, а $|В_1| > \frac{3}{4}|В|$. Поэтому мы заключаем, что множество $H = G \cap В_1$ не пусто. Но H содержится в множестве $Б$, а также, в силу процедуры, во всех других множествах $В$, $Г$, $Д$ и A. Иначе говоря, непустое множество $H \subset A \cap Б \cap В \cap Г \cap Д$, т.е. утверждение доказано: есть такая марка!

Непривычность таких выкладок для читателя связана с тем, что они теоретико-множественные и арифметические одновременно. Зато теперь вы можете обобщить задачу на n филателистов и доказать ее по той же схеме. При этом роль числа $\frac{3}{4}$ будет выполнять число $\frac{n-2}{n-1}$.

В.Произволов

М1829. *Можно ли раскрасить все точки квадрата и круга в черный и белый цвета так, чтобы множества белых точек этих фигур были подобны друг другу и множества черных точек были подобны* *друг другу (возможно, с разными коэффициентами подобия)?*

Ответ: можно.

Рассмотрим такую раскраску квадрата (рис.1). Впишем круг в квадрат и раскрасим в черный цвет точки квадрата, лежащие вне круга. Впишем в полученный круг квадрат со сторонами, параллельными сторонам исходного квадрата. Раскрасим в белый цвет точки круга, лежащие вне «маленького» квадрата. По такому же правилу раскрасим маленький квадрат и т.д. Заметим, что мы считаем граничные точки лежащими «внутри» фигуры. Таким образом, граница каждого квадрата покрашена черным, за исключением четырех точек касания вписанного в квадрат круга, а граница каждого круга – белым, за исключением четырех вершин квадрата, вписанного в этот круг.

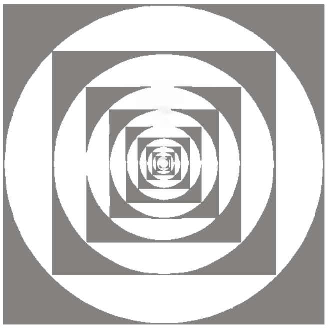


Рис.1

Пусть сторона исходного квадрата равна a (рис.2), тогда сторона маленького квадрата равна $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Следовательно, длины сторон квадратов стремятся к 0. Поэтому все точки, кроме центра, будут раскрашены. Центр раскрасим в черный цвет.

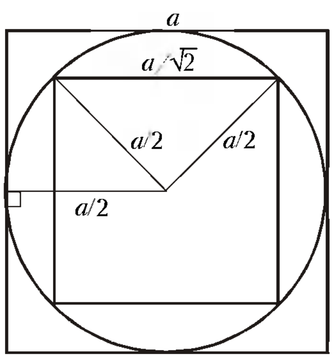


Рис.2

Очевидно, что множество черных точек квадрата подобно множеству черных точек круга, вписанного в этот квадрат (второе получается из первого гомотетией с центром в центре квадрата и с коэффициентом $\frac{a}{\sqrt{2}}$). А множество белых точек квадрата совпадает с множеством белых точек вписанного в него круга.

Г.Гальперин

М1830. *В возрастающей последовательности натуральных чисел каждое число, начиная с 2002-го, является делителем суммы всех предыдущих чисел. Докажите, что в последовательности найдется число, начиная с которого каждое число равно сумме всех предыдущих чисел.*

Пусть частное от деления суммы S_{n-1} предыдущих членов на очередной член a_n равно k_n, т.е. $S_{n-1} = a_n k_n$. Рассмотрим последовательность частных k_n, $n \ge 2002$. Так как следующий член a_{n+1} делит сумму $S_{n-1} + a_n$ и $a_{n+1} > a_n$, то

$$k_{n+1} = \frac{S_n}{a_{n+1}} = \frac{S_{n-1} + a_n}{a_{n+1}} < \frac{S_{n-1} + a_n}{a_n} = k_n + 1.$$

Таким образом, $k_{n+1} \le k_n$. Поэтому, начиная с некоторого места (при $n \ge N$), $k_n = k$. Но тогда при $n \ge N$ имеем $a_{n+1} = \frac{S_{n-1} + a_n}{k} = a_n + \frac{a_n}{k}$, т.е. с этого места получаем геометрическую прогрессию

$$a_{n+1} = \frac{k+1}{k} a_n = \frac{(k+1)^{n-N}}{k^{n-N}} a_N .$$

Получаем, что a_N делится на сколь угодно большую степень k. Значит, $k = 1$, что и требовалось доказать.

А.Шаповалов

Ф1838. *У вертикальной стены стоит палочка AB длиной L (рис.1). На ее нижнем конце B сидит жук. В тот момент, когда конец B начали двигать вправо по полу с постоянной скоростью $\vec{v}$, жук пополз по палочке с постоянной скоростью $\vec{u}$ относительно нее. На какую максимальную высоту над полом поднимется жук за время своего движения по палочке, если ее верхний конец не отрывается от стенки?*

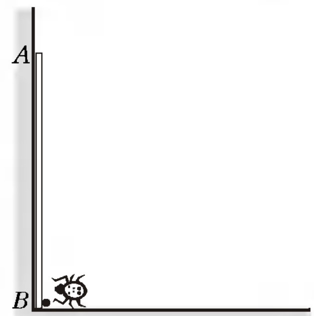


Рис.1

Пусть G – место нахождения жука на палочке (рис.2), M – середина палочки, $GK = h$ – высота жука над полом, $ON = H$ – расстояние от угла O до палочки, t – время, прошедшее с начала движения жука. Тогда $OB = vt$, $BG = ut$, $AM = OM = L/2$.

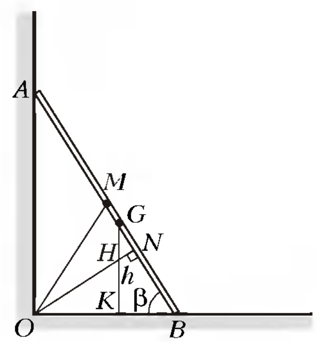


Рис.2

Треугольники ONB и GKB подобны, так как они прямоугольные и угол β у них общий, поэтому

$$\frac{GK}{ON} = \frac{BG}{OB}, \text{ или } \frac{h}{H} = \frac{ut}{vt} = \frac{u}{v},$$

откуда

$$h = H\frac{u}{v}.$$

В прямоугольном треугольнике OMN катет $ON = H$ меньше или равен гипотенузе $OM = L/2$, причем равенство достигается при $\beta = 45^\circ$. Следовательно,

$$h_{\max} = H_{\max}\frac{u}{v} = \frac{L}{2}\frac{u}{v}.$$

Этот результат верен, если за время $t_{\max} = \left(L\cos 45^\circ\right)/v$ жук не успевает доползти до верхнего конца палочки, т.е. если $ut_{\max} < L$, что эквивалентно неравенству $u \le v\sqrt{2}$. В противном случае высота h будет максимальной к моменту времени $t'_{\max} = L/u$ достижения жуком точки A:

$$h'_{\max} = \sqrt{L^2 - \left(vt'_{\max}\right)^2} = L\sqrt{1 - \frac{v^2}{u^2}}.$$

С.Кузьмичев

Ф1839. *На гладком столе покоится гантелька, состоящая из жесткого легкого стержня длиной L и двух маленьких одинаковых шариков на концах стер-*

жня. В начальный момент гантелька ориентирована с севера на юг. На один из шариков начинает действовать постоянная сила $\vec{F}$, все время направленная на восток. Найдите скорости шариков в тот момент, когда гантелька повернется на 90°. Найдите также силу натяжения стержня в этот момент. Масса каждого шарика M.

Центр масс гантельки движется прямолинейно с ускорением $a = F/(2M)$. Кроме того, гантелька неравномерно вращается вокруг своего центра. Угловую скорость вращения можно найти довольно просто. Пусть середина гантельки сместилась к некоторому моменту времени на l, а угол поворота гантельки относительно первоначального положения составил φ. Полная механическая энергия гантельки, т.е. сумма энергии поступательного движения центра масс и энергии вращательного движения относительно центра масс, определяется работой действующей силы:

$$W_{\text{пост}} + W_{\text{вращ}} = F\left(l + \frac{1}{2}L\sin\varphi\right).$$

С другой стороны,

$$W_{\text{пост}} = 2M\frac{v^2}{2} = 2M\frac{2al}{2} = 2M\frac{Fl}{2M} = Fl,$$

$$W_{\text{вращ}} = 2\frac{M(L/2)^2\omega^2}{2} = \frac{ML^2\omega^2}{4}.$$

Отсюда можно выразить угловую скорость вращения гантельки как функцию угла φ:

$$\omega = \sqrt{\frac{2F\sin\varphi}{ML}}.$$

Теперь можно найти силу натяжения стержня T. Удобно перейти в систему отсчета, связанную с центром масс, только нужно учесть, что она неинерциальная. Движется эта система отсчета равноускоренно, так что достаточно добавить две силы инерции – на каждый шарик будет действовать добавочная сила $f = -Ma = -F/2$. Каждый шарик в этой системе движется по окружности радиусом $L/2$, тогда для одного из шариков в проекции на направлении стержня получим

$$T - \frac{F\sin\varphi}{2} = M\omega^2\frac{L}{2}.$$

Отсюда

$$T = \frac{3F\sin\varphi}{2}.$$

В условии задачи рассматривается случай $\varphi = 90^\circ$, при этом $T = 1{,}5F$.

Найти скорость поступательного движения шариков не так просто. Ускорение центра масс нам известно, а вот время «путешествия» определяется вращательным движением гантельки. При малых значениях угла отклонения все считается легко, но в нашем случае углы большие. Выражение для угловой скорости мы записали, но это функция угла, а не времени, и найти зависимость угла поворота от времени простым способом не получится. Время поворота можно записать в виде несложного интеграла: $\tau = \int d\varphi/(\omega(\varphi))$ в пределах изменения угла от 0 до $\pi/2$. Но интеграл в нашем случае «не берется», хотя примерный ответ получить можно: $\tau = 2{,}62\sqrt{Ml/(2F)}$, однако это неинтересно. Попробуем посчитать другим способом (но тоже приближенно). Для этого заметим, что при небольших углах поворота проекция действующей силы на касательное к окружности направление получается почти равной F, а в этом случае движение вдоль окружности происходит с неизменным касательным ускорением ε. Для углов до 0,5 рад так и будем считать (можно взять и другое значение угла, но это – очень круглое и не очень большое). Время τ_1 прохождения этой части пути по кругу находим из соотношения

$$\frac{\varepsilon\tau_1^2}{2} = \varphi_1, \text{ и } \tau_1 = \sqrt{\frac{2\varphi_1}{\varepsilon}} = 1{,}41\sqrt{\frac{ML}{2F}}.$$

Кстати, к концу этого интервала угловая скорость достигает 0,7 от максимальной. Дальнейшее движение происходит почти равномерно – средняя скорость вращения составляет примерно $(0{,}7+1)/2 = 0{,}85$ от максимальной. Тогда этот интервал времени равен

$$\tau_2 = \frac{\pi/2 - \varphi_1}{\omega_{\text{ср}}} = \frac{1{,}57 - 0{,}5}{0{,}85\omega_{\max}} = 1{,}26\sqrt{\frac{ML}{2F}}.$$

Всего при таком способе вычислений для времени «путешествия» получится

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = 2{,}67\sqrt{\frac{ML}{2F}}.$$

Видно, что этот грубый способ дает просто превосходную точность.

Теперь можно найти скорость центра гантельки к концу интервала и полную скорость каждого шарика в этот момент:

$$V = \sqrt{(a\tau)^2 + \left(\omega\frac{L}{2}\right)^2} = 1{,}67\sqrt{\frac{FL}{2M}}.$$

З.Рафаилов

Ф1840. *Маятник состоит из длинного легкого стержня длиной L, шарнирно закрепленного за один из концов. К другому концу стержня прикреплено велосипедное колесо радиусом R, вся масса которого сосредоточена в его ободе. Колесо может свободно вращаться вокруг своей оси. Стержень отводят на небольшой угол от вертикали и отпускают так, что он может совершать колебания в плоскости, которая перпендикулярна оси колеса. Найдите период таких колебаний. Как изменится этот период, если в оси колеса будет большое трение, не позволяющее ему вращаться?*

В том случае, когда колесо может свободно вращаться вокруг своей оси, оно вращаться как раз и не будет (понятно – почему?). Тогда маятник ведет себя как математический с периодом колебаний

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

А вот если закрепить колесо на оси («с помощью» большого трения), то оно будет поворачиваться вместе с маятником, и период колебаний станет больше. Проведем энергетический расчет. Пусть угловая скорость составляет ω, тогда полная кинетическая энергия равна сумме энергии центра масс $M\omega^2L^2/2$ и энергии вращения колеса относительно центра масс

$M\omega^2R^2/2$. Всего получается

$$W = \left(1 + \frac{R^2}{L^2}\right)\frac{M\omega^2L^2}{2}.$$

Потенциальная энергия в обоих случаях рассчитывается одинаково. Видно, что по сравнению с первым случаем угловая скорость в любом месте траектории получается в одно и то же число раз меньше. Ясно, что во столько же раз возрастет и период колебаний:

$$T_1 = T_0\sqrt{1 + \frac{R^2}{L^2}}.$$

А.Зильберман

Ф1841. *С помощью бензиновой горелки в помещении поддерживается температура $t_1 = -3$ °С при температуре на улице $t_2 = -23$ °С. Предполагается использовать бензин в движке с КПД $\eta = 0,4$, а с помощью полученной механической энергии запустить тепловой насос, перекачивающий по идеальному холодильному циклу тепло с улицы в комнату. Какую температуру удастся в таком случае поддерживать в помещении при прежнем расходе бензина? Движок находится вне помещения.*

Мощность теплового потока из комнаты пропорциональна разности комнатной и уличной температур, т.е. в установившемся режиме при использовании горелки можно записать

$$N = k(T_1 - T_2),$$

где N – мощность горелки, k – коэффициент пропорциональности.

Идеальный холодильник работает по обратному циклу Карно. Пусть N_0 – мощность, отнимаемая агрегатом у окружающей среды, тогда

$$\frac{\eta N}{N_0} = \frac{T_3 - T_2}{T_2}, \text{ откуда } N_0 = \frac{T_2\eta N}{T_3 - T_2}.$$

В установившемся режиме мощность теплового потока в комнату равна

$$N' = N_0 + \eta N = k(T_3 - T_2).$$

Подставив сюда выражения для N_0 и N и сократив на k, получим

$$\frac{T_2\eta(T_1 - T_2)}{T_3 - T_2} + \eta(T_1 - T_2) = T_3 - T_2.$$

Из этого квадратного относительно T_3 уравнения найдем искомую температуру:

$$T_3 = 299 \text{ K, или } t_3 = 26 \text{ °C}.$$

Второе решение $T_3' = 209$ К, или $t_3' = -64$ °С, отвечает работе агрегата на охлаждение комнаты.

В.Белонучкин

Ф1842. *Две тонкие медные проволоки одинаковой длины соединили параллельно и подключили последовательно с лампочкой к источнику постоянного напряжения. Первая проволока нагрелась на 16 °С выше комнатной температуры, а вторая – в $\alpha = 2$ раза меньше. На сколько градусов выше комнатной температуры нагреются проволоки, если их параллельное соединение заменить последовательным? Сопротивление каждой из проволок много меньше сопротивления лампочки и источника, зависимость сопротивления проволок от температуры не учитывать.*

Пусть r_1 и r_2 – радиусы проволок, l – их длина. Тогда сопротивления проволок составляют

$$R_1 = \frac{\rho l}{\pi r_1^2},\ R_2 = \frac{\rho l}{\pi r_2^2}.$$

Мощности электрического тока, выделяющиеся на каждой из проволок при параллельном соединении, равны

$$P_1 = \frac{U^2}{R_1} = \frac{U^2\pi r_1^2}{\rho l},\ P_2 = \frac{U^2}{R_2} = \frac{U^2\pi r_2^2}{\rho l},$$

где U – напряжение на проволоках. В установившемся режиме, когда первая проволока нагрелась на Δt_1, а вторая на Δt_2, вся мощность электрического тока уходит через боковые поверхности проволок и идет на нагревание окружающей среды:

$$P_1 = k \cdot 2\pi r_1 l\Delta t_1,\ P_2 = k \cdot 2\pi r_2 l\Delta t_2,$$

где k – коэффициент пропорциональности. Тогда получим

$$U^2 r_1 = 2k\rho l^2\Delta t_1,\ U^2 r_2 = 2k\rho l^2\Delta t_2,$$

или

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \alpha.$$

Следовательно, отношение токов через проволоки при параллельном соединении равно

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{U/R_1}{U/R_2} = \frac{R_2}{R_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \alpha^2.$$

Поскольку сопротивление каждой из проволок много меньше сопротивления лампочки и источника, при замене параллельного соединения на последовательное сила общего тока в цепи не изменится:

$$I = I_1 + I_2 = \left(1 + \alpha^2\right)I_2.$$

Нагрев проволок (от комнатной температуры) в обоих случаях прямо пропорционален выделяющейся на них мощности электрического тока:

$$\frac{\Delta t_1'}{\Delta t_1} = \frac{P_1'}{P_1} = \frac{I^2R_1}{I_1^2R_1} = \left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^2}\right)^2,$$

$$\frac{\Delta t_2'}{\Delta t_2} = \frac{P_2'}{P_2} = \frac{I^2R_2}{I_2^2R_2} = \left(\alpha^2 + 1\right)^2,$$

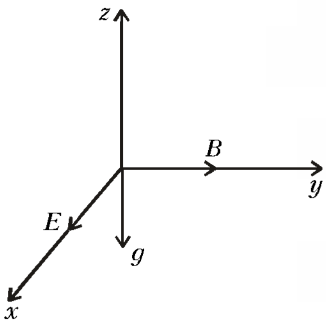
где штрихованные переменные относятся к последовательному подключению проволок. Отсюда находим

$$\Delta t_1' = \left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^2}\right)^2\Delta t_1 = 25 \text{ °C},$$

$$\Delta t_2' = \left(\alpha^2 + 1\right)^2\frac{\Delta t_1}{\alpha} = 200 \text{ °C}.$$

В.Ефимов

Ф1843. *Частица массой m с зарядом q движется с постоянной по модулю скоростью в области пространства, где имеются три взаимно перпендикулярных поля: электрическое с напряженностью $\vec{E}$, магнитное с индукцией $\vec{B}$ и поле тяжести $\vec{g}$ (см. рису-*



нок). В некоторый момент поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ выключают. Минимальная кинетическая энергия частицы в процессе движения составляет половину начальной. Найдите проекции скорости частицы на направления всех трех полей в момент выключения.

Результирующая сила $\vec{F}$, действующая на частицу со стороны полей $\vec{E}$ и $\vec{g}$, постоянна по модулю и направлению. Сила Лоренца не совершает работы, поэтому частица должна двигаться в плоскости, перпендикулярной силе $\vec{F}$, чтобы не изменялась абсолютная величина ее скорости. Вектор магнитной индукции тоже лежит в этой плоскости, значит, частица движется прямолинейно, т.е. равнодействующая всех сил равна нулю. Запишем это условие в проекции на ось x:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = qE - qv_zB = 0 \text{, и } v_z = \frac{E}{B}.$$

Когда кинетическая энергия достигает минимума, скорость частицы направлена горизонтально. В начальный момент времени кинетическая энергия частицы в 2 раза больше, значит, вертикальная и горизонтальная составляющие начальной скорости одинаковые. Поэтому

$$v_0 = \sqrt{2}\,v_z = \frac{E\sqrt{2}}{B}.$$

При движении в скрещенных полях силы, действующие на частицу вдоль оси z, скомпенсированы:

$$mg = qv_xB \text{, и } v_x = \frac{m}{q}\frac{g}{B}.$$

Составляющую скорости v_y найдем из условия

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v_0^2,$$

откуда

$$v_y = \sqrt{\left(\frac{E}{B}\right)^2 - \left(\frac{m}{q}\frac{g}{B}\right)^2}.$$

А.Шеронов

Ф1844. *Коллекторный двигатель питается от источника постоянного напряжения $U = 12$ В. На холостом ходу сила тока через обмотки ротора равна $I_1 = 4$ А. Когда ротор затормозили до полной остановки, сила тока увеличилась до $I_2 = 24$ А. Какую наибольшую полезную механическую мощность можно получить с помощью этого двигателя, если магнитное поле в нем создается постоянными магнитами, а момент сил трения в подшипниках ротора не зависит от скорости его вращения и от механической нагрузки?*

Возникающая в обмотках ротора ЭДС прямо пропорциональна угловой скорости его вращения: $\mathcal{E} = \alpha\omega$. Поэтому при полной остановке ротора ток через обмотки определяется только их активным сопротивлением $R = U/I_2$. Пусть ω_1 – угловая скорость вращения ротора при работе двигателя на холостом ходу. Тогда из закона Ома

$$U = \alpha\omega_1 + I_1R$$

находим

$$\alpha = \frac{U - I_1R}{\omega_1}.$$

В этом случае работа источника идет на выделение тепла в обмотках и на преодоление сил трения, поэтому из закона сохранения энергии

$$UI_1 = M\omega_1 + I_1^2R$$

находим момент сил трения:

$$M = \frac{UI_1 - I_1^2R}{\omega_1}.$$

Когда двигатель нагружен и вращается с угловой скоростью ω, из закона Ома для силы тока в обмотках получаем

$$I = \frac{U - \alpha\omega}{R}.$$

Полезная мощность двигателя в этом случае равна

$$P(\omega) = UI - I^2R - M\omega = -\frac{\alpha^2}{R}\omega^2 + \left(\frac{\alpha U}{R} - M\right)\omega.$$

Это – квадратичная функция, поэтому мощность будет максимальна при

$$\omega = \omega_m = \frac{\alpha U - MR}{2\alpha^2}.$$

Подставив в $P(\omega)$ выражения для R, α, M и ω_m, получим

$$P_m = P(\omega_m) = \frac{UI_2}{4}\left(1 - \frac{I_1}{I_2}\right)^2 = 50 \text{ Вт}.$$

В.Ефимов

Ф1845. *С одной из пластин изначально незаряженного конденсатора, подключенного выводами к катушке индуктивностью L, мгновенно отделяется тонкий слой вещества, несущий заряд q. Затем он движется поступательно как целое с постоянной скоростью v по направлению к противоположной пластине (рис.1). Найдите зависимость тока через катушку от времени, пока слой движется в конденсаторе. Расстояние между пластинами конденсатора d, площадь поперечного сечения пластин S.*

Сразу после отделения слоя вещества ток в цепи будет равен нулю, заряд на левой пластинке будет равен $-q$, а на правой заряда не будет.

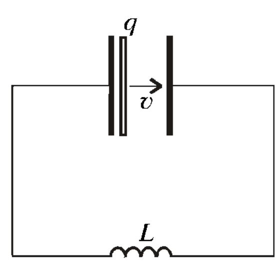


Рис.1

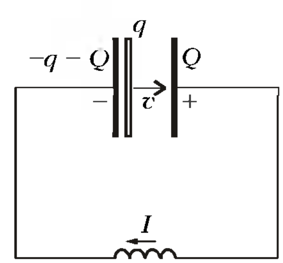


Рис.2

Теперь рассмотрим произвольный момент времени (рис.2). По закону сохранения заряда, если на правой пластине появится заряд Q, то на левой появится заряд $-q-Q$. Напряжение на конденсаторе будет создаваться полями трех заряженных пластин:

$$U_C=\frac{q+Q}{2\varepsilon_0 S}d+\frac{Q}{2\varepsilon_0 S}d+$$
$$+\frac{q}{2\varepsilon_0 S}vt-\frac{q}{2\varepsilon_0 S}(d-vt)=\frac{Qd+qvt}{\varepsilon_0 S},$$

где t – время, которое отсчитывается от момента отделения слоя. Запишем закон Ома для нашей цепи:

$$L\frac{dI}{dt}=\frac{Qd}{\varepsilon_0 S}+\frac{qvt}{\varepsilon_0 S}.$$

Продифференцируем обе части этого уравнения по t:

$$\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{d}{\varepsilon_0 SL}I=\frac{qv}{\varepsilon_0 SL}.$$

Общее решение этого дифференциального уравнения запишем в виде

$$I(t)=\frac{qv}{d}\left(A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t+1\right),\text{ где }\omega_0^2=\frac{d}{\varepsilon_0 SL}.$$

Из начальных условий, а именно $I=0$ и $dI/dt=0$ при $t=0$, найдем константы A и B и окончательно получим

$$I(t)=\frac{qv}{d}\left(1-\cos\omega_0 t\right).$$

В.Можаев

Ф1846. *Два одинаковых трансформатора содержат по две обмотки, одна из которых имеет в 2 раза больше витков, чем другая. Одну из обмоток первого трансформатора подключают к сети переменного напряжения 220 В, к другой обмотке этого трансформатора подсоединяют последовательно с резистором сопротивлением 200 Ом одну из обмоток второго трансформатора, а к выводам второй обмотки этого трансформатора подключают идеальный амперметр переменного тока. Что покажет прибор?*

Идеальный амперметр имеет нулевое сопротивление, поэтому напряжения обеих обмоток второго трансформатора получатся нулевыми Это возможно только в том случае, когда магнитный поток через сердечник этого трансформатора вообще не меняется (для переменного тока это нулевой магнитный поток). А это означает, что магнитные поля двух обмоток компенсируют друг друга и, следовательно, через обмотку с двойным числом витков течет вдвое меньший ток.

Теперь рассмотрим схему с двумя трансформаторами. Пусть первый трансформатор включен в сеть как понижающий. Тогда напряжение его вторичной обмотки равно 110 В, все это напряжение приложено к резистору, и ток через него, а значит и через подключенную последовательно с ним обмотку второго трансформатора, составит 110 В/200 Ом = 0,55 А. В зависимости от варианта включения обмоток второго трансформатора ток через амперметр будет или вдвое больше (если трансформатор включен как понижающий), или вдвое меньше. Если первый трансформатор включить как повышающий, то напряжение на резисторе составит 440 В, и через него пойдет ток 2,2 А. Опять получатся два варианта.

Итак, возможные значения тока амперметра таковы: 0,275 А; 1,1 А; 1,1 А; 4,4 А. При расчетах мы полагали трансформаторы идеальными, но при таких больших токах сделать трансформатор с малыми потерями довольно трудно – и сопротивления проводов обмоток должны быть совсем малыми, и сильные магнитные поля больших токов могут ввести ферромагнитный сердечник трансформатора в насыщение.

Р.Александров

Ф1847. *Говорят, что в архиве Снеллиуса нашли оптическую схему, на которой были изображены линза, предмет и его изображение. От времени чернила высохли, и остался только предмет на масштабной сетке (рис.1). Из текста следует, что предмет и изображение одинаковых размеров и формы, а главная оптическая ось параллельна некоторым линиям масштабной сетки. Восстановите оптическую схему (изображение, линзу, фокусы).*

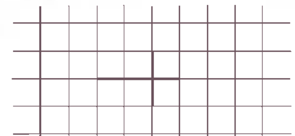


Рис.1

Один из отрезков предмета перпендикулярен главной оптической оси линзы, поэтому его изображение тоже перпендикулярно ей. Чтобы поперечное увеличение этого отрезка было единичным, он должен находиться на расстоянии $2F$ линзы, причем $F>0$. Второй отрезок и его изображение параллельны главной оптической оси, а это возможно, лишь если они лежат на ней.

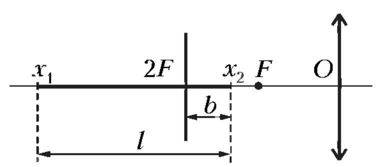


Рис.2

Пусть l – длина отрезка креста вдоль главной оптической оси, x_1, x_2 – координаты его концов, b – часть отрезка между точками $2F$ и x_2 (рис.2), a – размер клетки сетки. В зависимости от ориентации креста относительно линзы возможны три значения отношения $\alpha=b/l$, а именно: $\alpha_1=1/3$, $\alpha_2=2/3$, $\alpha_3=1/2$. Условие равенства длин отрезка креста вдоль оси и его изображения запишем в виде

$$l=\frac{x_2F}{x_2-F}-\frac{x_1F}{x_1-F},$$

или после преобразований –

$$lx_1x_2+lF^2-lF(x_1+x_2)=(x_1-x_2)F^2.$$

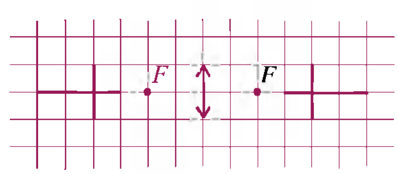
Подставив сюда $x_1=x_2+l$, получим

$$x_2(x_2+l)-F(2x_2-l)=0.$$

Теперь подставим $x_2=2F-\alpha l$ и найдем F:

$$\alpha^2l-2\alpha F+F-\alpha l=0,\text{ и }F=\frac{\alpha(1-\alpha)l}{1-2\alpha}.$$

Поскольку $F>0$, то $\alpha=1/3$ (для других α получается $F<0$), чему соответствует $l=3a$. Отсюда $F=2a$, после чего легко восстанавливается вся оптическая схема (рис.3).



А.Чудновский Рис.3

Задачи

1. У завхоза Васи было трое одинаковых чашечных весов. В одних потерялась часть деталей, и теперь они могут показывать что угодно. Любые весы помещаются на одну чашу других весов. За какое наименьшее количество взвешиваний можно определить неисправные весы?

В.Гуровиц, А.Чеботарев, Т.Караваева

2. Равносторонний треугольник как-то разрезан на равносторонние треугольники, периметр каждого из которых – целое число. Докажите, что периметр исходного треугольника – целое число.

В.Произволов

3. Архипелаг состоит из 7 островов, расположенных вблизи материка. С каждого острова выходит 3 моста. Между любыми двумя островами, а также между каждым островом и материком имеется не более одного моста. С острова Чунга на остров Чанга переехать нельзя. Сколько мостов связывают острова архипелага с материком?

М.Ахмеджанова

4. Два квадрата 10×10 одинаково раскрашены в 3 цвета, причем никакие две соседние (по стороне) клетки не покрашены в один цвет. Каждый квадрат разрезали произвольным образом на прямоугольники 2×1. Из частей одного квадрата составили новый квадрат 10×10. Всегда ли из частей второго квадрата можно составить такой же квадрат, как из первого?

В.Произволов

5. Вставьте вместо многоточий числа (в десятичной записи) так, чтобы было верным утверждение:
«В этом предложении цифра 0 встречается ... раз(а);
цифры, не превышающие 1, – ... раз(а);
цифры, не превышающие 2, – ... раз(а);
цифры, не превышающие 3, – ... раз(а);
цифры, не превышающие 4, – ... раз(а);
цифры, не превышающие 5, – ... раз(а);
цифры, не превышающие 6, – ... раз(а);
цифры, не превышающие 7, – ... раз(а);
цифры, не превышающие 8, – ... раз(а);
цифры, не превышающие 9, – ... раз(а)».

А.Шаповалов

Иллюстрации Д.Гришуковой

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.

Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы завершаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон.

16. Докажите, что сумма натуральных чисел от 1 до n равна произведению двух последовательных натуральных чисел тогда и только тогда, когда $n^2+(n+1)^2$ является квадратом целого числа.

В.Произволов

17. Пятеро друзей – Андрей, Боря, Вася, Гена и Дима – провели турнир по настольному теннису, играя парами так, что каждая пара сыграла с каждой одну игру. В результате Андрей в общей сложности проиграл 12 раз, а Борис – 6 раз. (Ничьих в теннисе не бывает.) Сколько раз выиграл каждый из игроков?

В.Каскевич

18. Перпендикуляр к середине одной из сторон треугольника делит его на 2 части, площади которых различаются в 3 раза. Перпендикуляр к середине другой стороны делит его на 2 части, площади которых различаются не в 3 раза. Во сколько раз различаются площади частей, на которые делит треугольник перпендикуляр к середине третьей стороны?

И.Акулич

19. Докажите, что для любого натурального n число $n^{n+1}+(n+1)^{n+2}+(n+2)^{n+3}$ составное.

А.Зайчик

20. Найдите все пары целых чисел (a, b), для которых уравнение

$$x^2+xy+y^2=3a^2+b^2$$

имеет решения в целых числах (x, y).

В.Каскевич

О физике на приусадебном участке (зимние зарисовки)

В.КОТОВ

Теплопроводность снега и коры

Покрывающий зимой землю слой снега образован кристаллами льда с многочисленными воздушными промежутками между ними. Из-за наличия воздуха снег плохо проводит тепло, поэтому окучивание снегом позволяет уберечь от мороза корни и стволы укрытых им растений.

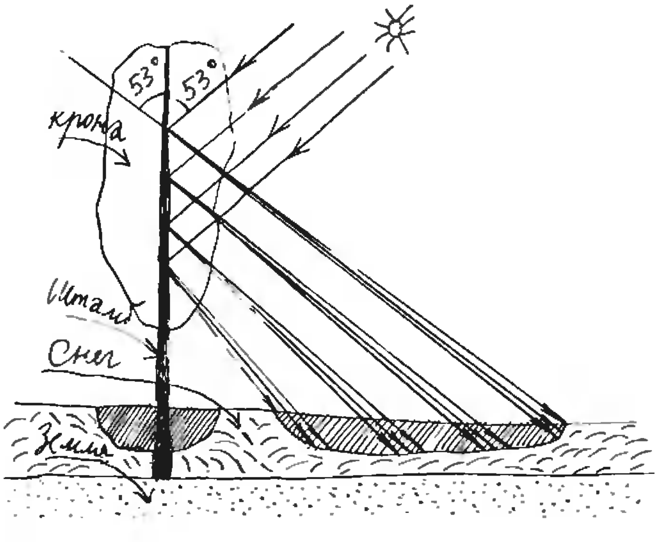
Кора растений состоит из растущих и отмерших клеток пробкового камбия. Они образуют герметичные полости, заполненные воздухом. Благодаря присутствию воздуха в полостях кора имеет низкую теплопроводность и защищает растения от перегрева и переохлаждения при резких колебаниях температуры.

Заметим, что подвязку растений, сделанную из неизолированной металлической проволоки, нельзя оставлять на зиму. Металл хорошо отводит тепло, и соприкасающиеся с ним ткани растения переохлаждаются и отмирают – получают «ожег холодом».

Выдувание снега вокруг ствола

Зимой вокруг стволов деревьев можно увидеть углубления в снегу. И вот почему.

При ветре струя воздуха, огибающая ствол, движется с увеличенной скоростью – чтобы образовать единый поток с не имевшими на своем пути препятствия струями воздуха (рассматриваем ламинарное течение). Струя воздуха с повышенной скоростью увлекает за собой снег. Кроме того, в струе понижается давление (в соответствии с законом Бернулли), что также способствует выдуванию снега вокруг ствола.



Тепловая проекция кроны

Для нас привычно, что позади дерева, если смотреть со стороны солнца, находится его тень. А что можно увидеть на поверхности земли между деревом и солнцем?

В марте, когда по-весеннему светит солнце, с южной стороны яблони на некотором расстоянии от штамба – нижней части ствола до первой ветви кроны – я замечал в снегу вытаявшее округлое углубление, как бы проекцию части кроны, имеющее приблизительно ее размер (см. рисунок). Глубина вытаявшего участка составляла несколько сантиметров со стороны дерева и плавно сходила на нет по мере удаления от него. Оказывается, это углубление протапливают солнечные лучи, отраженные кроной.

Действительно, от кроны происходит направленно-рассеянное отражение. При этом отраженные лучи, рассеиваясь, распространяются внутри телесного угла, направление оси которого соответствует закону направленного отражения. Весной высота верхней кульминации солнца возрастает изо дня в день. А чем выше находится солнце, тем под более острым углом его лучи после отражения кроной падают на снег и, значит, тем сильнее их тепловое воздействие на него. На широте Нижнего Новгорода ($\approx 53^\circ$ с.ш.), например, условия, необходимые для наблюдаемого своеобразного теплового проецирования кроны на снег, способствующего подтаиванию снега в этой проекции, создаются в конце марта около полудня.

Вблизи штамба вытаявшее углубление имеет бóльшую глубину и более резкую границу, ибо здесь на снег падает слабо расходящийся поток лучей, отраженных густой нижней частью кроны. По мере удаления от ствола пучок лучей, падающих на снег, ослабевает, поскольку он отражается от более редкой части кроны и сильнее рассеивается, достигая поверхности снега.

Часть падающего на крону и штамб солнечного излучения поглощается ими (в рассматриваемый период крона и штамб нагреваются днем с южной стороны до 15–20 °С), что приводит к появлению теплового инфракрасного излучения, также участвующего в подтаивании снега. По той же причине подтаивает и ветровая ямка с южной стороны штамба.

Разрыхление почвы замерзающей водой

Как известно, замерзая, вода расширяется. При неравномерном замерзании влажная почва растрескивается, повреждая корни зимующих растений.

Но особенности замерзания воды не обязательно вредят саду. Так, образование льда зимой в почве разрыхляет ее, что становится особенно заметным весной после оттаивания почвы.

Почему вода в растениях не замерзает

Растения более чем на 70% состоят из воды. Почему же они выдерживают довольно значительный холод и не замерзают? Так, яблони повреждаются только морозом свыше –45 °С. Дело в том, что при 0 °С замерзает лишь чистая вода в обычных условиях, а в растениях содержатся и сложные, в том числе коллоидные растворы, температура замерзания которых существенно ниже. Кроме того, растение «принимает специальные меры» для противодействия холоду: вырабатывает и накапливает криопротекторы (сахара, энергоемкие жиры) – вещества, окисление которых сопровождается выделением значительного количества тепла, которое и защищает растение от холода. Оно также переводит воду из клеток в межклеточное пространство, где она, замерзая, не повреждает протоплазму, а окружает клетку ледяной оболочкой и препятствует оттоку из нее тепла.

Иллюстрация В.Акатьевой

Если замерзание воды в дереве при очень низкой температуре все же произошло, то ткани его разрываются, и трещины проходят вдоль ствола и ветвей.

Заморозки и борьба с ними

Весенние заморозки губительны для цветущих садовых растений. Одно из условий наступления заморозков – сухость воздуха. Из такого воздуха не выпадает роса при вечернем понижении температуры, а значит, и не выделяется тепло конденсирующейся воды.

Садоводы стремятся исправить этот недостаток. Старинный способ – дымление (окуривание) сада. Для этого горючий материал раскладывают кучами и покрывают мокрой соломой, свежей травой и тому подобным сырым материалом так, чтобы сгорание шло медленно и сопровождалось испарением большого количества воды и образованием продуктов сгорания в виде дыма. Благодаря этому выделяемая при горении энергия не рассеивается, а идет на нагревание и испарение воды и поэтому задерживается в приземном слое воздуха. Эта энергия выделяется при последующем охлаждении и конденсации водяных паров. Дымление может повысить температуру в приземном слое воздуха на 1–1,5 °С.

Другой мерой борьбы с заморозками является полив и опрыскивание растений водой. Вода, обладающая большой теплоемкостью, запасает значительное количество тепла и затем отдает его окружающему воздуху, задерживая остывание растений. Но здесь нужно учесть следующее: холод всегда сушит. При контакте холодного воздуха с теплой поверхностью воздух нагревается, его влагоемкость возрастает, и он поглощает дополнительную воду с охлаждаемой поверхности или из окружающего пространства. Испарение же воды сопровождается затратой энергии и понижением температуры поверхности, с которой вода испаряется, в нашем случае – поверхности растения. Поэтому такой прием эффективен только при кратковременном и незначительном понижении температуры воздуха, а при сильных заморозках может дать результат, обратный ожидаемому.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Однозначно ли определяется треугольник?

А.ЖУКОВ, И.АКУЛИЧ

Мы будем заниматься исследованием задач, в которых треугольник требуется восстановить по некоторым заданным его элементам – прежде всего по трем высотам, медианам или биссектрисам.

Вопрос, вынесенный в заголовок, на самом деле можно «расщепить» на два вопроса:

1) *определяется ли* треугольник заданными элементами (т.е. *существует ли хотя бы одно* решение рассматриваемой задачи);

2) если решение задачи существует, то *единственно ли оно* (*однозначно ли* определяется треугольник)?

Мы знаем, что треугольник *однозначно* задается тремя своими сторонами (это так называемый третий признак равенства треугольников [1, с.39]). Однако, произвольно задавая длины сторон, мы можем и не получить треугольник (попробуйте построить треугольник со сторонами 1, 2 и 5 сантиметров). Не по всяким своим элементам треугольник восстанавливается однозначно. Например, задав сторону AB, высоту h, проведенную к этой стороне, и радиус R описанной около треугольника окружности, мы можем получить два различных треугольника ACB и ADB (рис.1).

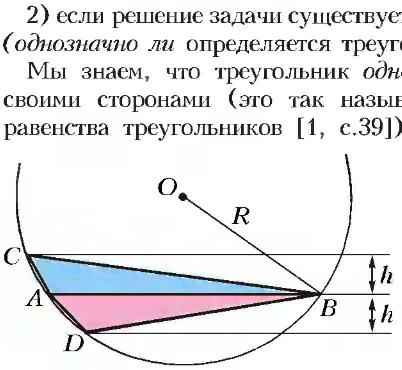


Рис. 1

Однозначно ли определяется треугольник своими высотами?

Обозначим a, b, c длины сторон треугольника, h_a, h_b, h_c – длины высот, опущенных на соответственные стороны, S – площадь треугольника. Для удобства введем также обозначения $\eta_a = \frac{1}{h_a}$, $\eta_b = \frac{1}{h_b}$, $\eta_c = \frac{1}{h_c}$.

Поскольку

$$S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}, \tag{1}$$

то

$$a : b : c = \eta_a : \eta_b : \eta_c . \tag{2}$$

Последнее соотношение позволяет сделать вывод: треугольник с высотами h_a, h_b, h_c существует, если из отрезков длины η_a, η_b, η_c можно составить треугольник. Иными словами, величины η_a, η_b, η_c, так же, как и длины сторон a, b, c, должны удовлетворять неравенству треугольника.

Упражнения

1. Докажите, что если справедливо соотношение (2), то совокупность неравенств

$$\begin{aligned} a+b&>c,\\ b+c&>a,\\ c+a&>b \end{aligned} \qquad (3)$$

эквивалентна совокупности неравенств

$$\begin{aligned} \eta_a+\eta_b&>\eta_c,\\ \eta_b+\eta_c&>\eta_a,\\ \eta_c+\eta_a&>\eta_b. \end{aligned} \qquad (4)$$

2. Покажите, что

$$S=\left((\eta_a+\eta_b+\eta_c)(\eta_a+\eta_b-\eta_c)(\eta_b+\eta_c-\eta_a)(\eta_c+\eta_a-\eta_b)\right)^{-1/2}. \quad (5)$$

Итак, если длины высот h_a, h_b, h_c удовлетворяют неравенствам (4), то площадь S треугольника вычисляется однозначно по формуле (5). Но в этом случае равенства (1) позволяют однозначно вычислить и длины сторон треугольника a, b, c.

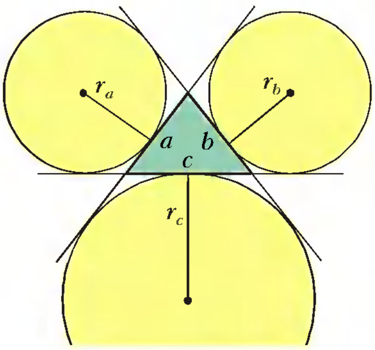


Рис. 2

Упражнения

3. Однозначно ли определяют треугольник радиусы r_a, r_b, r_c вневписанных окружностей (рис.2)?

4. Постройте треугольник по трем высотам h_a, h_b, h_c.

Однозначно ли определяется треугольник своими медианами?

В школьном курсе геометрии (см., например, [1], с.212, задача 788) доказывается, что из медиан произвольного треугольника можно составить треугольник. Следовательно, если треугольник с заданными длинами медиан m_a, m_b, m_c существует, то величины m_a, m_b, m_c должны удовлетворять неравенствам

$$\begin{aligned} m_a+m_b&>m_c,\\ m_b+m_c&>m_a,\\ m_c+m_a&>m_b. \end{aligned} \qquad (6)$$

Для исследования вопроса об однозначности восстановления треугольника по его трем медианам удобно воспользоваться известными соотношениями, связывающими длины медиан треугольника с его сторонами a, b, c:

$$\begin{aligned} 2m_a^2&=2\left(b^2+c^2\right)-a^2,\\ 2m_b^2&=2\left(c^2+a^2\right)-b^2,\\ 2m_c^2&=2\left(a^2+b^2\right)-c^2. \end{aligned} \qquad (7)$$

Упражнения

5. Докажите, что если длины медиан m_a, m_b, m_c треугольника удовлетворяют неравенствам (6), то стороны этого треугольника a, b, c в силу равенств (7) определяются однозначно.

6. Постройте треугольник по трем медианам m_a, m_b, m_c.

Однозначно ли определяется треугольник своими биссектрисами?

Сначала предположим, что треугольник с некоторыми заданными длинами трех биссектрис существует. В этом случае докажем, что треугольник своими биссектрисами определяется однозначно. А именно, докажем следующий признак равенства треугольников.

Теорема. *Если три биссектрисы одного треугольника соответственно равны трем биссектрисам другого треугольника, то эти треугольники равны.*

Доказательство. Пусть треугольники Δ_1 и Δ_2 имеют соответственно равные биссектрисы. Назовем соответственными сторонами этих двух треугольников стороны, к которым проведены равные биссектрисы. Достаточно рассмотреть два случая:

1) все стороны одного треугольника не меньше соответственных сторон другого треугольника;

2) ровно одна сторона одного треугольника меньше соответственной стороны другого треугольника.

Рассмотрим случай 1).

Если все соответственные стороны треугольников равны, то эти треугольники равны по третьему признаку равенства треугольников.

Предположим, что у треугольников имеются неравные соответственные стороны. Во-первых, заметим, что треугольники не могут быть подобными с коэффициентом подобия, отличным от 1. В противном случае биссектрисы одного из треугольников были бы больше соответствующих биссектрис другого. Следовательно, у треугольников имеются неравные углы. Не умаляя общности, будем считать, что стороны треугольника Δ_1 не меньше соответственных сторон треугольника Δ_2. Поскольку у треугольников Δ_1 и Δ_2 имеются неравные углы, то в треугольнике Δ_1 найдется угол φ_1, меньший соответственного угла φ_2 в треугольнике Δ_2. Если угол φ_1 в треугольнике Δ_1 образован сторонами p_1, q_1, а угол φ_2 в треугольнике Δ_2 образован сторонами p_2, q_2, то для длин биссектрис l_1, l_2 этих углов имеем

$$l_1=\frac{2\cos\frac{\varphi_1}{2}}{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}},\quad l_2=\frac{2\cos\frac{\varphi_2}{2}}{\frac{1}{p_2}+\frac{1}{q_2}}. \qquad (8)$$

Здесь мы воспользовались формулой

$$l=\frac{2\cos\frac{\varphi}{2}}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}, \qquad (9)$$

связывающей длину биссектрисы l со значением угла φ, в котором она проведена, а также с длинами p и q образующих этот угол сторон треугольника.

Упражнение 7. Выведите формулу (9).

Вернемся к соотношениям (8). Так как $\varphi_2>\varphi_1$, $p_2\le p_1$, $q_2\le q_1$, то $l_2<l_1$ – противоречие.

Итак, в рассматриваемом случае треугольники могут иметь только равные соответственные стороны.

Рассмотрим случай 2).

Без ограничения общности можно считать, что стороны a_1, b_1, c_1 треугольника Δ_1 соответственны сторонам a_2, b_2, c_2 треугольника Δ_2, причем

$$a_1<a_2,\ b_1\ge b_2,\ c_1\ge c_2. \qquad (10)$$

Воспользовавшись еще одной известной формулой, связывающей длину биссектрисы с длинами сторон треугольника, имеем

$$\begin{aligned} l_{a_1}^2&=b_1c_1\left(1-\frac{a_1^2}{(b_1+c_1)^2}\right),\\ l_{a_2}^2&=b_2c_2\left(1-\frac{a_2^2}{(b_2+c_2)^2}\right). \end{aligned} \qquad (11)$$

С учетом неравенств (10), из (11) следует $l_{a_2}^2<l_{a_1}^2$ – противоречие.

Признак равенства треугольников по трем биссектрисам доказан.

Замечание. Выше мы уже доказали другие признаки равенства треугольников. Подытоживая все результаты вместе, заключаем, что *треугольники равны, если они имеют*

- *равные высоты,*
- *равные медианы,*
- *равные биссектрисы.*

Существует ли треугольник с заданными биссектрисами?

Пока остается неясным следующий вопрос. Существует ли треугольник, длины биссектрис которого равны трем наперед заданным положительным числам l_a, l_b, l_c? Должны ли мы на эти числа накладывать какие-либо ограничения, как это было в случае с высотами и медианами? Оказывается, для любых положительных чисел l_a, l_b, l_c такой треугольник существует.

Эта задача имеет длинную историю. По всей видимости, одна из первых ее формулировок принадлежит французскому математику Анри Брокару (1845–1922), хотя нет сомнений, что задача занимала умы математиков и раньше. Брокар опубликовал свою формулировку в 1875 году. В 1994 году румынские математики Петру Миронеску и Лаурентин Панаитопол в журнале «Mathematical Monthly» привели решение, основанное на теореме Брауэра о неподвижной точке.

Ниже мы приведем свое решение, в идейном плане доступное старшеклассникам, хотя и требующее для полного обоснования некоторых фактов математического анализа.[1]

Теорема. *Для любых положительных чисел l_a, l_b, l_c существует единственный треугольник с биссектрисами, длины которых равны l_a, l_b, l_c.*

Доказательство. Напомним, что биссектрисы l_a, l_b, l_c и стороны a, b, c любого треугольника связаны соотношениями

$$l_a^2 = bc\left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right),$$
$$l_b^2 = ac\left(1 - \frac{b^2}{(a+c)^2}\right), \qquad (12)$$
$$l_c^2 = ab\left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right).$$

Введя вспомогательные переменные ξ, η, ζ, p:

$$p = a + b + c,$$
$$\xi = \frac{a}{p},$$
$$\eta = \frac{b}{p}, \qquad (13)$$
$$\zeta = \frac{c}{p},$$

равенства (12) запишем в таком виде:

$$\frac{l_a^2(1-\xi)^2\xi}{1-2\xi} = p^2\eta\zeta\xi,$$
$$\frac{l_b^2(1-\eta)^2\eta}{1-2\eta} = p^2\eta\zeta\xi, \qquad (14)$$
$$\frac{l_c^2(1-\zeta)^2\zeta}{1-2\zeta} = p^2\eta\zeta\xi.$$

Заметим, что вещественная функция $\varphi = \frac{(1-x)^2 x}{1-2x}$ на интервале $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$ – непрерывная и монотонно возрастающая. Последний факт следует из того, что ее производная

$$\varphi'(x) = \frac{(1-x)(4x^2 - 3x + 1)}{(1-2x)^2}$$

на указанном интервале положительна. Значит, обратная к φ функция f также непрерывная и возрастающая.

Теперь равенства (14) можно переписать так:

$$\xi = f\left(\frac{t}{l_a^2}\right),$$
$$\eta = f\left(\frac{t}{l_b^2}\right), \qquad (15)$$
$$\zeta = f\left(\frac{t}{l_c^2}\right),$$

где $t = p^2\eta\zeta\xi$. Поскольку

$$\xi + \eta + \zeta = \frac{a}{p} + \frac{b}{p} + \frac{c}{p} = \frac{a+b+c}{p} = 1,$$

получаем уравнение

$$f\left(\frac{t}{l_a^2}\right) + f\left(\frac{t}{l_b^2}\right) + f\left(\frac{t}{l_c^2}\right) = 1.$$

В его левой части стоит возрастающая функция, при $t \to 0$ стремящаяся к 0, а при $t \to +\infty$ – к $\frac{3}{2}$. Значит, решение уравнения $t = t_0$ существует и единственно.

Зная $t = t_0$, находим ξ_0, η_0 и ζ_0 из (15), затем находим p_0 из соотношения $p = \sqrt{\frac{t}{\eta\zeta\xi}}$ и, наконец, получаем $a_0 = \xi_0 p_0$, $b_0 = \eta_0 p_0$ и $c_0 = \zeta_0 p_0$.

Таким образом, по длинам биссектрис l_a, l_b, l_c длины сторон a, b, c треугольника определяются однозначно. Теорема доказана.

В этом месте читатель не найдет традиционного упражнения: «постройте треугольник по трем его биссектрисам». Располагая лишь классическим набором инструментов – линейкой без делений и циркулем, выполнить такое построение невозможно. Это доказал в 1896 году П.Барбарин. С доказательством этого факта можно познакомиться в статье Ю.И. Манина [2].

Литература

1. *Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др.* Геометрия 7–9. – М.: Просвещение, 2001.

2. *Манин Ю.И.* О разрешимости задач на построение с помощью циркуля и линейки // Энциклопедия элементарной математики. Т. IV. – М.: Наука, 1961. – С.205–227.

[1] *Несколько более длинные решения редакция получила от Ю.Томчука и Н.Осипова.*

Вместо камертона мы ставим электрически колеблющийся проводник. Вместо резонотора мы берем наш прервонный искровым промежутком провод, который мы тоже нозываем электрическим резонотором.

Г.Герц

Я указывал, что молекулы газов мы должны рассматривать как отдельные резонаторы, облодоющие определенным избирательным поглощением.

П.Лебедев

Явление резононса, изученное впервые в окустике, ею обсолютно не огроничивается. <...> Теперь, я думаю, вом будет ясно, кок явление резонанса может окозаться губительным для мосто.

Л.Мандельштам

В природе очень часто что-нибудь «колеблется» и так же чосто ноступает резонанс.

Р.Фейнман

А так ли хорошо знаком вам резонанс?

Чем связаны между собой гудение проводов линии электропередачи и неожиданное дребезжание посуды в шкафу, подскоки на трамплине прыгуна в воду и настройка радиоприемника, звучание музыкальных инструментов и раскачивание вытаскиваемой из грязи автомашины, раздражающее «пение» водопровода и вращение гимнастской обруча вокруг талии, раскалывание бокала при взятии певцом высокой ноты и работа плавящей металл индукционной печи, разрушение гигантских мостов под действием ветра и сильная вибрация корпуса корабля? . .

Изумленный читатель спросит: «Уж не вознамерился ли автор перечислить вообще все на свете?» Конечно же, нет. Просто, приведенные примеры объединены часто встречающимся и действительно создающим впечатление всеохватности явлением — резонансом.

Однако в слове «резонанс», от латинского resono — откликаюсь, кроется ключ к установлению подобия между весьма разнородными процессами, когда на периодическое внешнее воздействие нечто, способное колебаться, отвечает увеличением размаха собственных колебаний. Иначе говоря, когда малые причины способны привести к большим последствиям. Выявив эту особенность, вы легко продолжите список примеров и, как это часто бывает, обнаружите как полезные, так и вредные проявления резонанса.

Отметим, что универсальность в описании колебательных процессов, в том числе и резонанса, послужила ученым путеводной звездой при освоении неизведанных ранее областей, например мира микроявлений. А это привело к созданию таких мощных методов исследования строения вещества, как электронный парамагнитный резонанс и ядерный магнитный резонанс.

Возможно, вы найдете сегодня достаточно доказательств обширности и важности этой темы и тогда «войдете в резонанс» с высказыванием Фейнмана.

Вопросы и задачи

1. Можно ли дуновением раскачать массивный груз, подвешенный на нити?

2. Чтобы удержать открытую в вестибюле метро дверь, возвращаемую в положение равновесия пружинами, нужно приложить к ее ручке силу 50 Н. Достаточно ли силы 1 Н для открытия этой двери, если пренебречь трением в петлях?

3. Почему раскачиваются качели, если приседать при их максимальном отклонении и вставать при прохождении положения равновесия? За счет какой энергии происходит раскачка?

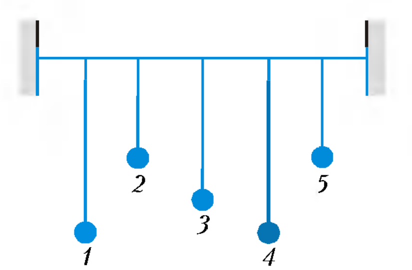
4. Когда быстрее наступает резонанс — при сильном или слабом затухании собственных колебаний?

5. Можно ли сильно раскачать мост, стреляя очень много раз в него из рогатки в такт его собственным колебаниям?

6. При движении по ледовой «Дороге жизни», связывающей блокадный Ленинград с Большой землей, наиболее опасной для автомашин была скорость 35 км/ч. Почему? Как можно было избежать опасности?

7. Плывущий по морю катер начал сильно раскачиваться при небольшом волнении. Капитан изменил курс катера и его скорость, и, хотя волны стали бить в борт чаще, качка заметно уменьшилась. Отчего?

8. Для каких из показанных на рисунке маятников возможен резонанс?



9. Если педалью освободить струны рояля и громко пропеть несколько нот, то можно услышать «отклик». Как это объяснить?

10. Зачем полый корпус скрипки и виолончели делают фигурным? Как от габаритов корпуса зависит тон звучания?

11. Отчего при поднесении к уху чашки или раковины морского моллюска слышен звук, напоминающий отдаленный шум моря?

12. Когда к ножке одного из двух настроенных в резонанс камертонов прикрепили кусочек воска, камертоны оказались расстроены. Чем это объясняется?

13. В цепь переменного тока последовательно включены электрическая лампа, конденсатор и катушка индуктивности без сердечника. При постепенном введении в катушку сердечника лампа сначала стала гореть ярче, а затем накал ее нити уменьшился. Почему?

14. Напряжение на зажимах генератора периодически изменяется по закону, графически

представленному на рисунке. Как должна быть связана частота генератора с собственной частотой подключенного к нему колебательного контура для резкого увеличения тока в цепи?

15. В каком случае электромагнитная волна передает максимум энергии расположенному на ее пути колебательному контуру?

16. При резонансе длина антенны должна быть в четыре раза меньше длины принимаемой электромагнитной волны. Почему же на практике пользуются антеннами значительно меньшей длины?

Микроопыт

Подставьте пустую бутылку под тонкую струю воды из-под крана. Какой звук вы услышите? Как и почему меняется его тон по мере заполнения бутылки?

Любопытно, что...

...еще в античном театре для усиления голоса актера использовались большие глиняные или бронзовые сосуды (прообразы резонаторов Гельмгольца), представляющие собой полости шарообразной или бутылочной формы с узким длинным горлом.

...издревле звонари на колокольнях бессознательно использовали явление резонанса, раскачивая тяжелый колокол незначительными, но ритмичными толчками. А в Кёльнском соборе в свое время был подвешен колокол, качавшийся в фазе со своим языком, что не позволяло извлечь из него никаких звуков.

...на дальних подступах к своему открытию светового давления П.Н.Лебедев обнаружил в опытах смену взаимного притяжения вибратора и резонатора на их отталкивание при переходе через резонанс, причем как для электромагнитных, так и для гидродинамических и звуковых волн. Тождественность возникающих во всех случаях сил свидетельствовала о независимости полученных закономерностей от природы колебательных систем.

...в начале 30-х годов XX века практически все авиаторы столкнулись с загадочным явлением, названным флаттером, когда самолеты в спокойном горизонтальном полете неожиданно начинали вибрировать с такой силой, что разваливались в воздухе на куски. Как выяснилось, флаттер порождался причинами, подобными тем, что вызывали обрушение висячих мостов. Это сходство помогло рассчитать критическую скорость, при которой наступает раскачка крыльев, и избежать аварий.

...в барокамере, заполненной смесью гелия и кислорода, скорость звука намного превосходит скорость звука в воздухе. Из-за этого преображается звучание голосов людей: длины волн собственных колебаний воздуха в гортани — резонаторе — не меняются, а увеличение частоты, связанное с ростом скорости, приводит к повышению тона.

...изоляция кабелей, испытанная в лаборатории с помощью постоянного напряжения, порой пробивалась при работе с переменным током. Оказалось, что это происходит при совпадении периода пульсаций тока с периодом собственных электрических колебаний кабеля, что приводило к нарастанию напряжения, многократно превышающего пробойное.

...если в электрическом колебательном контуре менять емкость или индуктивность с частотой, в два раза большей собственной частоты контура, то в нем можно возбудить колебания. На этом так называемом параметрическом резонансе основано действие генераторов переменного тока, изобретенных российскими физиками Л.И.Мандельштамом и Н.Д.Папалекси.

...даже в гигантских современных циклотронах — ускорителях заряженных частиц — используется простой принцип, заключающийся в обеспечении резонанса между движением частицы по спиральной траектории и переменным электрическим полем, периодически «подхлестывающим» частицу.

Что читать в «Кванте» о резонансе

(публикации последних лет)

1. «Ужасы резонанса» — 1997, №3, с.37;
2. «Вращение: реки, тайфуны, молекулы» — 1997, №5, с.30;
3. «О волнах, поплавках, шторме и прочем» — 1999, №3, с.9;
4. «Один Герц» — 2000, №2, с.10;
5. «Колебания и маятники» — 2000, Приложение №3, с.5;
6. «Связанные маятники» — 2000, Приложение №3, с.57;
7. «Почему «поет» водопровод?» — 2000, Приложение №3, с.67;
8. «Бег, ходьба и физика» — 2000, Приложение №5, с.7;
9. «О водяном звере и акустическом резонансе» — 2001, Приложение №1, с.78;
10. «Печаль или радость» — 2001, №3, с.37;
11. «Колебательный контур» — 2002, №3, с.49.

Материал подготовил А.Леонович

Физика 9–11

Публикуемая ниже заметка «Рычажные весы» предназначена девятиклассникам, «Молекулы, сосиски и алмазы» — десятиклассникам и «Небо синее, Солнце красное» — одиннадцатиклассникам.

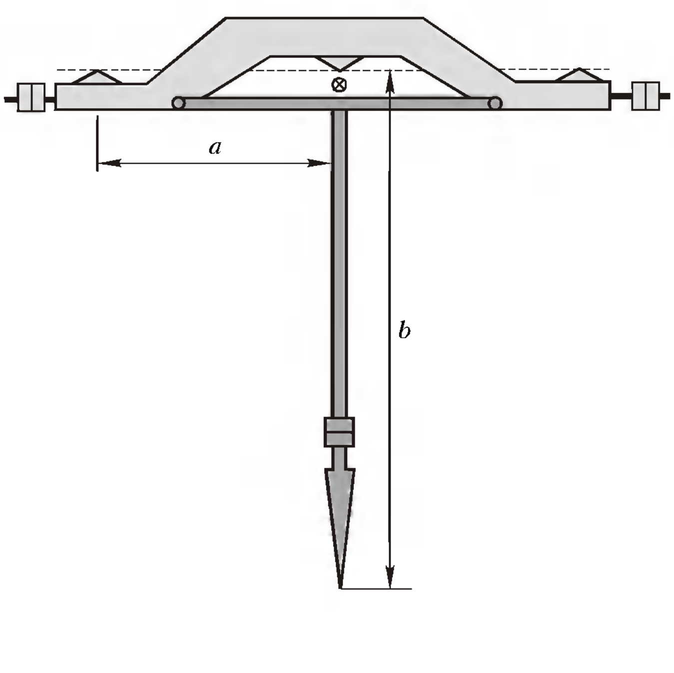
Рычажные весы

С.ВАРЛАМОВ

Кажется, что может быть проще, чем рычажные равноплечие весы? Опора, коромысло да две чашки. Однако говорят, что есть весы точные и грубые, чувствительные и не очень. Что такое чувствительность весов? Это способность коромысла изменить свое положение – повернуться на заметный невооруженным глазом угол – при изменении величины груза на одной из уравновешенных чашек. Чем меньший груз вызывает заметный поворот коромысла, тем выше чувствительность весов. Минимальная масса, вызывающая такой заметный поворот, является количественной характеристикой чувствительности весов. Например, школьные рычажные весы обычно имеют чувствительность 10 миллиграмм, при этом конец стрелки, прикрепленной к коромыслу, смещается относительно опоры (или шкалы, размещенной на опоре) на расстояние порядка 1 миллиметра.

Чтобы сделать хорошие, т.е. чувствительные, весы и обеспечить независимость их чувствительности от массы измеряемого груза, нужно выполнить ряд условий (см. рисунок).

Первое условие. Коромысло с грузом, уравновешенным набором гирь, или без груза должно иметь положение устойчивого равновесия. Это обеспечивается тем обстоятельством, что центр масс коромысла (на рисунке он изображен крестиком в кружочке) находится ниже, чем линия опоры коромысла на подпятник (ось вращения коромысла).



Второе условие. Мгновенная ось вращения коромысла не должна перемещаться относительно подставки. Это достигается выполнением опоры коромысла в виде хорошо заточенной призмы. Опоры чашек на коромысло тоже выполняются в виде заточенных призм, исходя из тех же соображений: оси вращения чашек не должны перемещаться относительно коромысла. При малой площади контакта опоры и подпятника (того места, на которое опирается призма) давление на материал подпятника и на материал самой призмы становится больше.

Третье условие. Подпятники и призмы не должны деформироваться при наличии нагрузки на коромысло. Для этого призмы и подпятники изготавливаются из материалов, обладающих высокой твердостью. В ход идут рубины, алмазы и более дешевые, но твердые материалы.

Четвертое условие. Чувствительность весов не должна зависеть от наличия на чашках уравновешенных грузов. Это обеспечивается конструктивной особенностью весов: мгновенные оси вращения чашек относительно коромысла должны находиться на одинаковом расстоянии от оси вращения коромысла относительно подставки (равноплечие рычажные весы) и, кроме того, все эти три оси должны находиться в одной плоскости. Если это условие выполнено, то любые одинаковые грузы, лежащие на разных чашках, создают относительно оси вращения коромысла суммарный момент сил тяжести, равный нулю. Причем этот момент сил остается равным нулю при любом повороте коромысла относительно подставки весов. Это означает, что положение равновесия коромысла не нарушится, если на обе чашки весов положить одинаковые грузы. И при любых величинах уравновешенных грузов поочередное помещение на каждую из чашек некоторого перегрузка вызовет поворот коромысла на один и тот же угол. Это и соответствует независимости чувствительности весов от груза на чашках.

Заметим, что от суммарной массы грузов зависит период колебаний весов около положения равновесия – чем больше масса, тем больше период. Если, например, суммарная масса грузов на чашках весов равна массе коромысла, период колебаний возрастает примерно вдвое по сравнению с периодом колебаний без грузов на чашках. (Проверьте это самостоятельно и постарайтесь объяснить.)

Для регулировки весов используются несколько пар гаек на стержнях с резьбой, прикрепленных к коромыслу. Перемещение гаек на концах коромысла позволяет изменять положение центра масс по горизонтали. Одна из пар гаек перемещается вдоль стрелки, прикрепленной к коромыслу, и обеспечивает изменение расстояния от оси вращения коромысла до центра масс коромысла.

А теперь рассмотрим школьные равноплечие весы. Пусть масса их коромысла равна M = 200 г, расстояние от оси вращения каждой из чашек до оси вращения коромысла равно a = 20 см, а расстояние от оси вращения коромысла до кончика стрелки, прикрепленной к коромыслу, равно b = = 20 см. Обсудим три конкретные задачи.

Задача 1. *Предположим, что весы настроены так, что перегрузок m = 10 мг на одной из чашек весов вызывает поворот коромысла к новому положению равновесия, причем конец стрелки смещается относительно подставки весов на l = 1 мм. Каково расстояние x от центра масс коромысла до оси его вращения?*

Угол поворота коромысла небольшой: $\alpha = l/b$. Плечо силы тяжести Mg, действующей на коромысло, равно $x\alpha = xl/b$. Момент силы тяжести коромысла относительно оси вращения коромысла равен $Mgxl/b$. Этот момент уравновешивается моментом силы тяжести перегрузка относительно той же оси вращения, равным mga:

$$\frac{Mgxl}{b} = mga .$$

Отсюда

$$x = \frac{mab}{Ml} = 2 \text{ мм} .$$

Задача 2. *Пара гаек, обеспечивающих настройку весов, имеет массу 1 г. Куда и на какое расстояние нужно переместить гайки, чтобы чувствительность весов стала равной 5 мг?*

Масса коромысла 200 г, центр масс находится на расстоянии 2 мм от оси вращения, перемещение гаек должно сократить расстояние между осью вращения и центром масс до 1 мм (это следует из предыдущей задачи). Следовательно, пару гаек массой 1 г нужно переместить вверх на расстояние 200 мм.

Задача 3. *Коромысло с чашками без грузов имеет положение равновесия, при котором стрелка отклонена от середины шкалы вправо на 10 мм. Пара регулировочных гаек имеет массу 1 г и в данный момент находится на расстоянии 20 см справа от оси вращения коромысла. В какую сторону и на какое расстояние нужно передвинуть регулировочные гайки, чтобы стрелка в положении равновесия находилась точно в середине шкалы?*

Очевидно, что гайки, обозначим их массу $m_г$, следует передвинуть вправо. Это перемещение ΔL должно привести к изменению момента силы тяжести относительно оси вращения коромысла на величину, равную моменту сил, возникающему при помещении на чашку весов перегрузка массой m = 100 мг (мы воспользовались результатами задачи 1):

$$m_г g\Delta L = mga ,$$

откуда

$$\Delta L = \frac{ma}{m_г} = 2 \text{ см} .$$

Молекулы, сосиски и алмазы

А.СТАСЕНКО

Алмаз – чистый углерод, встречающийся в прозрачных кристаллах от мелких зерен, видимых лишь в микроскоп, до кристаллов массой в 3000 карат (600 г).

...Согласно преданию, знаменитый «Коинур», или «Гора света», отнятый у короля Лахора английскими войсками,.. принадлежал королю Карна уже за 3 тыс. лет до н.э.

А.Ферсман. Рассказы о самоцветах

Как известно, потенциальная энергия взаимодействия двух точечных зарядов обратно пропорциональна расстоянию между ними (этот факт тесно связан с законом Кулона):

$$W_p \sim \frac{q_1q_2}{r} .$$

Если знаки зарядов противоположны, потенциальная энергия отрицательна – имеет место притяжение, а зависимость $W_p(r)$ можно изобразить в виде бесконечно глубокой потенциальной «ямы» (рис.1; штриховая линия).

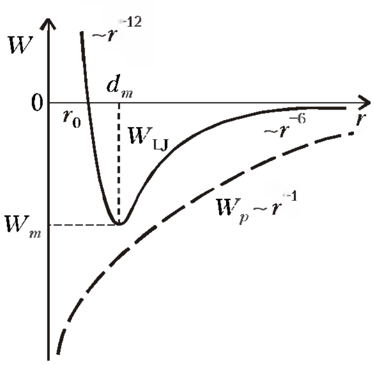


Рис. 1

Нейтральные молекулы тоже взаимодействуют друг с другом. На расстояниях r, значительно превосходящих их характерный размер d_m, они испытывают взаимное притяжение – поэтому газы и могут конденсироваться. При попытке же сблизить молекулы так, чтобы r стало меньше d_m, возникает сильное отталкивание – поэтому жидкости слабо сжимаемы. Значит, радиальная зависимость потенциальной энергии взаимодействия двух нейтральных молекул должна состоять из двух ветвей: резко падающей вблизи начала координат и затем плавно растущей и приближающейся к оси абсцисс (рис.1; сплошная кривая). Ясно, что в такой ситуации должно существовать значение межмолекулярного расстояния $r = d_m$, соответствующее минимуму потенциальной энергии W_m – дну той самой потенциальной ямы, куда стремятся «свалиться» молекулы, образуя конденсированное вещество.

Физики придумали много зависимостей потенциальной энергии взаимодействия молекул от расстояния между ними. Одна из них – потенциал Леннарда–Джонса – имеет вид

$$W_{LJ} = 4W_m\left(\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12} - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{6}\right). \qquad (*)$$

В этом случае можно найти минимум функции и получить значение характерного размера молекул: $d_m = r_0\sqrt[6]{2}$. Поскольку в наших обозначениях r есть расстояние между центрами молекул, то d_m можно назвать диаметром молекул, а тогда их «собственный радиус» равен $d_m/2$.

Если молекула находится в глубине газа или конденсата, вдали от его границ, то она со всех сторон окружена другими молекулами. Однако если молекула расположена у поверхности конденсата, то у нее число соседей, а значит, и молекулярных связей, меньше, чем у молекул в глубине. Поэтому потенциальная энергия таких молекул будет другой.

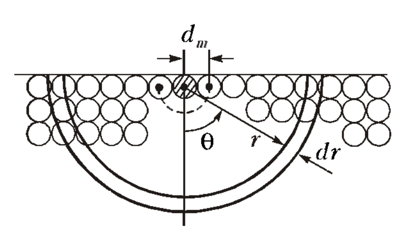


Рис. 2

Рассмотрим одну из поверхностных молекул (заштрихована на рисунке 2) и найдем энергию ее взаимодействия со всеми остальными молекулами, заполняющими полупространство. Используя очевидную симметрию задачи, выделим шаровой слой, ограниченный полусферами с радиусами r и $r + dr$. Сколько молекул dN содержится в этом слое? Объем слоя равен $2\pi r^2 dr$, концентрация молекул равна $n = \rho/m$ (ρ – плотность жидкости, m – масса одной молекулы), тогда

$$dN = \frac{\rho}{m}\cdot 2\pi r^2 dr .$$

Пусть потенциал парного взаимодействия описывается зависимостью (*). Тогда суммарная энергия взаимодействия выделенной нами молекулы со всем полупространством будет описываться легко вычисляемым интегралом:

$$W_\Sigma = \frac{\rho}{m}\cdot 4W_m \int_{d_m}^{\infty}\left(\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12} - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{6}\right)\cdot 2\pi r^2 dr =$$

$$= 8\pi\frac{\rho}{m}W_m\left(-\frac{r_0^{12}}{9r^9} + \frac{r_0^6}{3r^3}\right)\Bigg|_{r=d_m}^{\infty} = -\frac{10}{9}\pi\rho\frac{W_m}{m}d_m^3 .$$

На каждую молекулу в поверхностном слое приходится площадь d_m^2. Следовательно, поверхностная плотность энергии равна по величине

$$w = \frac{10}{9}\pi\rho\frac{W_m}{m}d_m .$$

Подставим данные для воды: $m = 18\cdot 1{,}67\cdot 10^{-27}$ кг $\approx 3\cdot 10^{-26}$ кг, $\rho = 10^3$ кг/м^3, $d_m \approx 3$ Å $= 3\cdot 10^{-10}$ м, $W_m = 10^{-20}$ Дж и получим $w \approx 0{,}35$ Дж/м^2.

Но поверхностная плотность энергии есть величина порядка коэффициента поверхностного натяжения воды, который при комнатных условиях равен $\sigma = 0{,}07$ Дж/м^2. Как видим, наша оценка, хотя и завышена, весьма удовлетворительна, если учесть грубость сделанных предположений.

Но при чем тут сосиски и алмазы? Очень даже при чем, и не только они. Например, существование капель воды тоже обеспечивается поверхностным натяжением. Так, капли дождя радиусом a, падая в атмосфере, сплющиваются аэродинамической силой сопротивления, равной силе тяжести (в установившемся режиме). Приравнивая эту силу «восстанавливающей» силе поверхностного натяжения – порядка $2\pi a\sigma$, – получим оценку предельного радиуса капли:

$$m_к g \sim 2\pi a\sigma, \text{ где } m_к = \frac{4}{3}\pi a^3\rho ,$$

откуда

$$a \sim \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} = \sqrt{\frac{0{,}07 \text{ Дж/м}^2}{10^3 \text{ кг/м}^3\cdot 10 \text{ м/с}^2}} \approx 2{,}6 \text{ мм},$$

что вполне реально (понаблюдайте за летним ливнем).

Это поверхностное натяжение в случае кривой поверхности вызывает дополнительное давление внутри объема жидкости. Рассмотрим небольшой участок цилиндрической поверхности с радиусом кривизны R_1 и центральным углом $\Delta\alpha$ (рис.3,*а*). Если его длина l, то на каждую сторону действует сила, равная σl. Результирующая сила, как легко понять из рисунка 3,*б*, направлена к центру кривизны и равна

$$\Delta F = 2\sigma l\cdot \mathrm{tg}\frac{\Delta\alpha}{2} \approx \sigma l\Delta\alpha.$$

Учитывая, что длина дуги Δs связана с радиусом кривизны

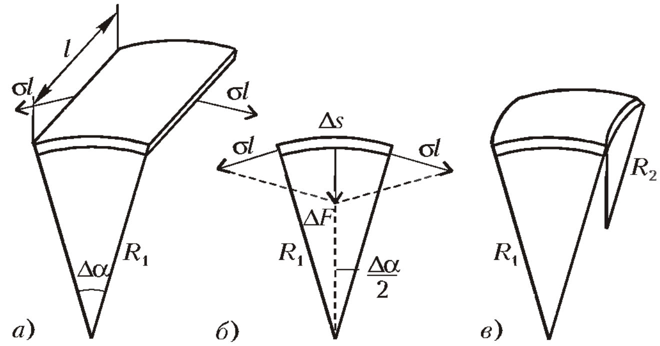


Рис. 3

соотношением $\Delta s = R_1\Delta\alpha$, получим

$$\frac{\Delta F}{l\Delta s} = \frac{\sigma}{R_1} .$$

Но это ведь давление!

Понятно, что если участок поверхности не цилиндрический, а искривлен еще и в другой плоскости (радиус кривизны R_2; рис.3,*в*), то получим большее давление:

$$p_L = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

(здесь индекс «L» подчеркивает наше уважение к Лапласу, чьим именем называют это избыточное давление под изогнутой поверхностью).

Из последней формулы ясно, например, почему сосиски при долгом кипении лопаются вдоль, а не поперек: натяжение их оболочки на цилиндрическом участке меньше, чем на сферических закруглениях, а давление содержимого можно считать постоянным во всех направлениях. Так же ведут себя и длинные газгольдеры – устройства для приема, хранения и выдачи газа.Конечно, в этих случаях поверхностное натяжение обеспечивается оболочкой сосиски или газгольдера.

А что же алмазы? Как известно, для их получения требуются высокие температуры и давления. Оказывается, и здесь на помощь приходит лапласовское давление. Оценим, какого размера алмаз можно получить из расплавленного углерода. Примем $\sigma = 5$ Дж/м^2, $p = 60\cdot 10^3$ атм. Считая частицу сферической ($R_1 = R_2 = a$), из выражения для добавочного давления получим

$$a = \frac{2\sigma}{p} = \frac{2\cdot 5 \text{ Дж/м}^2}{6\cdot 10^9 \text{ Н/м}^2} \approx 15\cdot 10^{-10} \text{ м} = 15 \text{ Å} .$$

Конечно, мелковатые алмазы, но для многих технологий весьма полезные.

Итак, варя сосиски и думая об алмазах, не теряйте чувства меры, ибо не напрасно один литературный герой как-то сказал, что бриллиант в тысячу карат – это пóшло.

Небо синее, Солнце красное

А.СТАСЕНКО

Ни пустоты, ни тьмы нам не дано:
Есть всюду свет, предвечный и великий...
И.Бунин

Как известно, антенны созданы для того, чтобы излучать и принимать электромагнитные волны. Отдельный атом тоже излучает, переходя в более низкое энергетическое состояние. Но он может и принимать электромагнитные волны определенных частот, возбуждаясь при этом, т.е. переходя в состояние с большей энергией. Так что атом в какой-то мере есть маленькая антенна. Только в атоме, согласно классической модели, электроны движутся по замкнутым траекториям, в простейшем случае – по окружностям. А движение по окружности (с радиусом a) можно представить как сумму двух гармонических колебаний, происходящих в той же плоскости, но во взаимно перпендикулярных направлениях и со сдвигом фаз 90° (рис.1,*а*):

$$x = a\cos\omega t\,,$$

$$y = a\sin\omega t\,,$$

$$x^2 + y^2 = a^2\left(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t\right) = a^2\,.$$

Рассмотрим поэтому движение зарядов только вдоль одной оси, например x.

Вообразим простейшую «антенну» в виде двух точечных одинаковых по модулю и противоположных по знаку зарядов $\pm q$, расстояние между которыми в данный момент равно $x(t)$ (рис.1,*б*). Эта система зарядов – диполь – электрически нейтральна, тем не менее при постоянном значении x

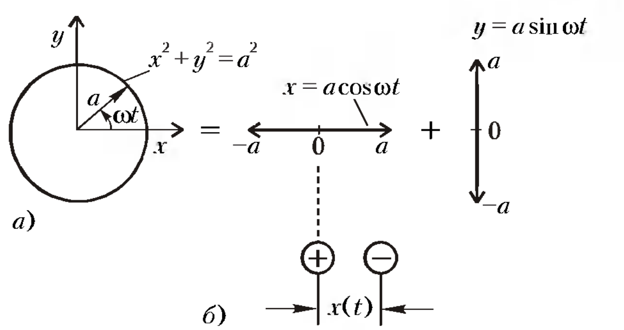


Рис. 1

(плечо диполя) она создает электрическое дипольное поле, которое убывает с расстоянием быстрее, чем поле точечного заряда. Можно показать, что модуль напряженности дипольного поля пропорционален r^{-3}, но нас сейчас это *статическое* поле не интересует.

Пусть положительный заряд неподвижен (например, тяжелое ядро атома), а отрицательный («центр тяжести» электрона или электронного облака) движется относительно него. Чтобы точно описать возникающее *переменное* электромагнитное поле, необходимо использовать систему уравнений Максвелла, а в случае реального микрообъекта (атома) – и квантовую физику. Однако, этим лучше заняться, поступив в Московский физико-технический институт (или в Московский университет). Сейчас же постараемся сделать некоторые приближенные оценки, опираясь на теорию размерностей и сведения об электромагнетизме из школьной физики. Для удобства даже перенумеруем необходимые нам качественные соображения.

1) Неподвижный заряд не излучает энергию. То же очевидно и в отношении заряда, движущегося с постоянной скоростью (равномерно и прямолинейно). Иначе его излучение можно было бы использовать, скажем, для определения того, какая из инерциальных систем отсчета движется, а какая неподвижна, что запрещено в физике.

Итак, излучать энергию может только заряд, движущийся ускоренно. Например, заряд, колеблющийся по упомянутому выше гармоническому закону $x(t) = a\cos\omega t$, заведомо движется ускоренно,и его ускорение равно $x'' = -\omega^2 x(t)$.

2) Энергия, излучаемая ускоренно движущимся зарядом, течет в радиальном направлении (не обязательно равномерно по всем направлениям; рис.2). При этом предполагается, что излучение рассматривается на больших расстояниях, намного превышающих амплитуду колебаний a.

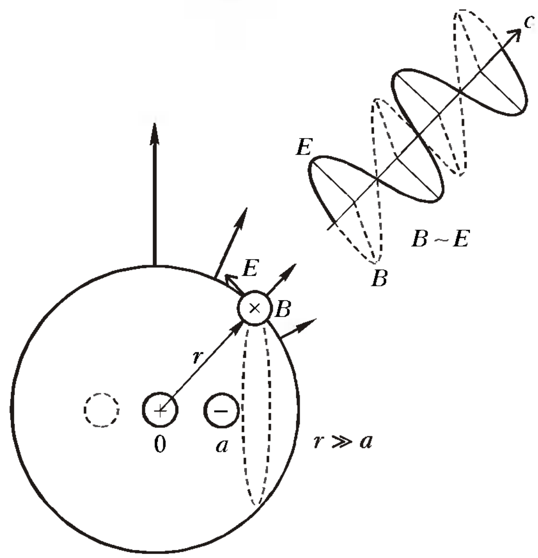


Рис. 2

Кроме того, энергия течет от излучающего заряда, независимо от того, движется ли он вправо или влево от положения равновесия. Значит, поток энергии должен зависеть от четной степени ускорения. Какой именно? Ну конечно, второй, поскольку...

3) Плотность потока энергии электромагнитной волны пропорциональна произведению электрического и магнитного полей, а последние пропорциональны друг другу, в силу линейности уравнений электромагнетизма.

Уже то, что мощность излучения пропорциональна четвертой степени частоты ($W \sim x''^2 \sim \omega^4$), позволяет объяснить такой красивый факт природы, как голубизна неба. Дело в том, что Солнце излучает довольно широкий спектр длин электромагнитных волн λ (рис.3). Наш глаз приспособился видеть основную, наиболее энергетичную часть, заключенную в пределах $\lambda = 0,4 - 0,8$ мкм. Короткие волны соответствуют фиолетовому концу этого спектра, длинные – красному. Но чем меньше длина волны, тем выше частота $(\omega = 2\pi c/\lambda)$. И, согласно полученному выше соотношению, короткие (или высокочастотные) волны, возбуждая частицы атмосферы (и таким образом превращая их в излучающие

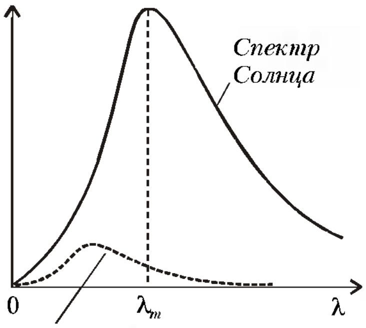


Рис. 3

диполи), должны рассеиваться сильнее длинных – да еще в четвертой степени (см. точечную кривую на рисунке 3).

Ясно также, почему Солнце кажется красным на закате: в это время его лучи проходят в атмосфере самый длинный путь, и из них отсеиваются во все стороны именно голубые лучи, что относительно обогащает красную часть спектра.

Но продолжим рассуждения о структуре волны, излучаемой ускоренно движущимся зарядом.

4) Векторные линии магнитного поля $\vec{B}$ имеют вид окружностей в плоскостях, перпендикулярных направлению движения заряда, а поскольку векторы $\vec{B}$, $\vec{c}$ и $\vec{E}$ образуют *правую тройку* (электромагнитная волна *поперечна*), то вектор $\vec{E}$ должен быть направлен по касательной к сфере радиусом r. Все это и показано на рисунке 2.

Все, что мы наговорили до сих пор, дает возможность заключить, что излучаемая мощность может быть записана в виде $W \sim q^2 x''^2$. А там, где появляется кулон в квадрате, в СИ всегда появляется множитель $1/(4\pi\varepsilon_0)$, имеющий размерность м/Ф. Но ведь $\text{Кл}^2/\text{Ф} = \text{Дж}$ (вспомним хотя бы формулу для энергии конденсатора), а размерность W должна быть $\text{Вт} = \text{Дж/с}$. Следовательно, нужно еще разделить на куб скорости… чего? конечно же, света. Итак,

$$W \sim \frac{q^2 x''^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3}.$$

Точная формула

$$W = -\frac{2}{3}\frac{q^2 x''^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3} \qquad (*)$$

не намного отличается от полученного нами выражения (знак минус указывает на убыль энергии).

Но что же это получается? Электроны в атомах движутся вокруг ядер ускоренно (вспомним, что движение по окружности – ускоренное), значит, согласно изложенным представлениям классической физики, они должны излучать энергию и в конце концов упасть на ядра? Оценим время такого падения. Сумма кинетической и потенциальной энергий электрона на круговой орбите радиусом a равна

$$E = \frac{m_e v^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

(здесь предполагается простейший случай атома водорода: m_e – масса электрона, e – его заряд). Учитывая, что сила Кулона сообщает электрону центростремительное ускорение:

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2} = m_e\frac{v^2}{a},$$

найдем

$$E = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a}.$$

Разделив эту начальную (до излучения) суммарную энергию E на скорость ее потерь W, получим оценку времени излучения τ. Будем считать, что излучение происходит за много периодов колебаний, и осредним выражение (*) по времени. Используем известный факт: $\langle\cos^2\omega t\rangle = 1/2$. Тогда

$$\tau \sim \frac{E}{W} \sim \frac{1}{\omega^4}\left(\frac{c}{a}\right)^3 = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^4\frac{1}{a^3 c}.$$

Подставим сюда характерные величины: длину волны, соответствующую максимуму солнечного спектра $\lambda_m = 0{,}55$ мкм (кстати, это зеленый свет, так что не случайно Солнце относится к спектральному классу зеленых звезд), и радиус орбиты a порядка 1 Å (эта величина и введена специально для измерения атомарных размеров). В результате получим

$$\tau \sim \frac{\left(5{,}5\cdot10^{-7}\ \text{м}\right)^4}{(2\pi)^4\cdot\left(10^{-10}\ \text{м}\right)^3\cdot3\cdot10^8\ \text{м/с}} \approx 0{,}2\cdot10^{-6}\ \text{с}.$$

Значит, за доли микросекунды электроны должны были бы упасть на ядра, и наш мир перестал бы существовать!?

Но тут на помощью пришла квантовая теория: она разрешила электронам долго «жить» на избранных орбитах (подобно тому, как заботливое жилищное управление разрешает квартиросъемщикам спать на этажах, а не на лестничных маршах). Однако, это уже другая история…

ИНФОРМАЦИЯ

Вниманию руководителей школ и других образовательных учреждений, учителей физики и старшеклассников!

XXУ Всероссийский турнир юных физиков (ТЮФ) будет проходить в городе Екатеринбурге в Специализированном учебно-научном центре Уральского государственного университета с 17 по 22 марта 2003 года. Для участия в турнире необходимо подготовить решения задач, условия которых можно получить в одном из локальных оргкомитетов ТЮФа:

Екатеринбург, Специализированный учебно-научный центр Уральского государственного университета, Иничева Ольга Викторовна – заместитель директора СУНЦ УрГУ по научной работе, тел.: (3432) 410659, факс: (3432) 412468, e-mail: inicheva@lyceum.usu.ru;

Москва, Специализированный учебо-научный центр Московского государственного университета, Лобышев Валентин Иванович – заведующий кафедрой физики СУНЦ МГУ, тел: (095) 4455306, e-mail: lob@school.phys.su.

Комбинированные задачи по механике

В.ПЛИС

Опыт вступительных экзаменов в ведущие физические вузы (МФТИ, МГУ, НГУ и др.) показывает, что задачи по механике, для решения которых следует привлекать не только законы сохранения или изменения физических величин, но и учитывать кинематические связи, выполнять переход из одной системы отсчета в другую, анализировать динамику системы тел наряду с динамикой того или иного тела в отдельности и т.д., вызывают затруднения у поступающих. Такие задачи иногда называют комбинированными. Зачастую они допускают несколько подходов к решению. Проиллюстрируем это на конкретных примерах достаточно сложных задач вступительных экзаменов по физике.

Задача 1. *Однородные шары радиусом R каждый находятся на гладкой горизонтальной спице (рис.1). К покоящемуся шару массой $6m$ прикреплена легкая пружина жесткостью k и длиной $6R$. Шар массой m движется со скоростью v. Найдите максимальную деформацию ΔL_m пружины и время τ контакта шара массой m с пружиной.*

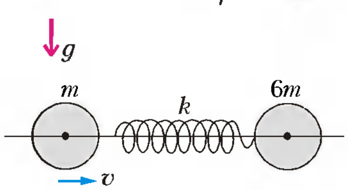


Рис. 1

Рассмотрим три способа решения этой задачи.

Первый способ

В лабораторной системе отсчета – ЛСО – уравнения движения шаров в проекции на горизонтальную ось x принимают вид (рис.2)

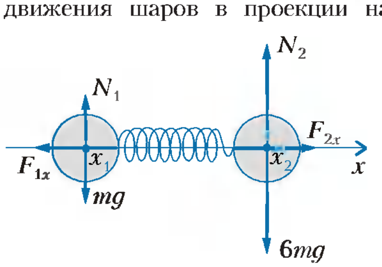


Рис. 2

$$ma_{1x} = F_{1x},$$

$$6ma_{2x} = F_{2x}.$$

Отсюда с учетом равенства $F_{1x} = -F_{2x}$ получим

$$a_{2x} - a_{1x} = F_{2x}\left(\frac{1}{6m} + \frac{1}{m}\right).$$

В момент времени t деформация пружины равна

$$L(0) - L(t) = 6R - (x_2 - x_1 - 2R) = -(x_2 - x_1) + 8R,$$

где L – длина пружины. Упругая сила связана с деформацией пружины законом Гука:

$$F_{2x} = k\left(-(x_2 - x_1) + 8R\right).$$

Тогда движение одного шара относительно другого описывается уравнением

$$(x_2 - x_1 - 8R)'' = a_{2x} - a_{1x} = -\frac{k}{M}(x_2 - x_1 - 8R),$$

где $M = \dfrac{m \cdot 6m}{m + 6m} = \dfrac{6}{7}m$ – так называемая приведенная масса системы шаров. Это уравнение описывает свободные гармонические колебания. Его общее решение имеет вид

$$x_2 - x_1 - 8R = A\cos\omega t + B\sin\omega t,$$

где $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{M}} = \sqrt{\dfrac{7k}{6m}}$, а постоянные A и B можно найти из начальных условий

$$x_2(0) - x_1(0) - 8R = 0 = A,$$

$$v_{2x}(0) - v_{1x}(0) = -v = B\omega.$$

Окончательно получим

$$x_2(t) - x_1(t) - 8R = -v\sqrt{\frac{6m}{7k}}\sin\omega t.$$

Отсюда находим максимальную деформацию пружины:

$$\Delta L_m = v\sqrt{\frac{6m}{7k}}.$$

Шар массой m будет находиться в контакте с пружиной в течение половины периода гармонических колебаний:

$$\tau = \frac{\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{6m}{7k}}.$$

Второй способ

В ЛСО кинетическая энергия системы материальных точек равна

$$E_k = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Если ввести систему центра масс – Ц-систему, – то с учетом правила сложения скоростей

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{ц} + \vec{u}_i,$$

где $\vec{v}_{ц}$ – скорость центра масс в ЛСО, $\vec{u}_i$ – скорость i-й точки в Ц-системе, выражение для энергии можно преобразовать:

$$E_k = \frac{\left(\sum_i m_i\right)v_{ц}^2}{2} + \sum_i \frac{m_i u_i^2}{2} + \left(\vec{v}_{ц} \cdot \sum_i m_i\vec{u}_i\right).$$

Последнее слагаемое в этом выражении равно нулю, так как в Ц-системе скорость центра масс равна нулю:

$$\vec{u}_{ц} = \frac{\sum_i m_i\vec{u}_i}{\sum_i m_i} = 0.$$

Полученное равенство

$$E_k = \frac{\left(\sum_i m_i\right)v_{ц}^2}{2} + \sum_i \frac{m_i u_i^2}{2}$$

словами формулируется так (теорема Кенига): кинетическая энергия системы материальных точек равна сумме половины произведения массы системы на квадрат скорости ее центра масс и кинетической энергии относительного движения в Ц-системе.

Чтобы применить эту формулу для решения нашей задачи, найдем скорость центра масс системы шаров. Так как горизонтальные внешние силы на шары не действуют, импульс системы сохраняется:

$$mv = (m + 6m) v_ц ,$$

поэтому скорость центра масс системы в ЛСО постоянна и равна $v_ц = v/7$. В момент начала деформации пружины кинетическая энергия относительного движения шаров в Ц-системе равна

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{7m}{2}\left(\frac{v}{7}\right)^2 = \frac{3mv^2}{7} .$$

В процессе деформации кинетическая энергия относительного движения убывает до нуля, а энергия деформации растет и достигает наибольшего значения в момент остановки шаров в Ц-системе. Центр масс системы движется при этом с постоянной скоростью. По закону сохранения энергии,

$$\frac{3mv^2}{7} = \frac{k\Delta L_m^2}{2} ,$$

откуда

$$\Delta L_m = v\sqrt{\frac{6m}{7k}} .$$

Для определения τ заметим, что деформация пружины изменяется по гармоническому закону, поэтому амплитуда скорости деформации и амплитуда относительного смещения связаны соотношением

$$v_m = v = \omega \Delta L_m .$$

Из двух последних равенств находим

$$\omega = \frac{v}{\Delta L_m} = \sqrt{\frac{7k}{6m}} .$$

Искомое время равно половине периода гармонических колебаний:

$$\tau = \frac{\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{6m}{7k}} .$$

Третий способ

В начальный момент времени скорости шаров в Ц-системе максимальны по величине и равны, соответственно, $u_{1m} = v - v/7 = 6v/7$ для налетающего в ЛСО шара и $u_{2m} = v/7$ для покоящегося шара. В Ц-системе (системе нулевого импульса) отношение скоростей 6 : 1 (обратное отношению масс) будет постоянным в процессе деформации пружины. Следовательно, неподвижная в Ц-системе точка пружины делит ее длину в том же отношении, т.е. 6 : 1. Жесткость пружины обратно пропорциональна ее длине. Отсюда находим жесткости двух пружин, разделенных неподвижной точкой:

$$k_1 = \frac{7}{6}k \text{ и } k_2 = 7k .$$

Тогда амплитуды смещений шаров будут равны

$$\Delta L_{1m} = \frac{u_{1m}}{\omega_1} = \frac{6v/7}{\sqrt{k_1/m}} = \frac{6}{7}v\sqrt{\frac{6m}{7k}}$$

и

$$\Delta L_{2m} = \frac{u_{2m}}{\omega_2} = \frac{v/7}{\sqrt{k_2/(6m)}} = \frac{1}{7}v\sqrt{\frac{6m}{7k}} .$$

Эти деформации достигаются одновременно, а максимальная деформация пружины равна их сумме:

$$\Delta L_m = \Delta L_{1m} + \Delta L_{2m} = v\sqrt{\frac{6m}{7k}} .$$

Время τ равно половине периода гармонических колебаний любого шара:

$$\tau = \frac{\pi}{\omega_1} = \frac{\pi}{\omega_2} = \pi\sqrt{\frac{6m}{7k}} .$$

Задача 2. *С плоскости, образующей с горизонтом угол α, скатывается без проскальзывания однородная тонкостенная труба массой М. Найдите ускорение $a_ц$ центра масс трубы и силу трения $F_{тр}$, пренебрегая влиянием воздуха. При каком соотношении между коэффициентом трения скольжения μ и углом α качение будет происходить без проскальзывания? Ускорение свободного падения равно g.*

Введем обозначения: $\vec{v}_ц$ – скорость центра масс трубы, ω – угловая скорость вращения трубы в Ц-системе. Труба катится без проскальзывания, поэтому

$$v_ц = \omega R ,$$

где R – радиус трубы. Кинетическая энергия трубы равна

$$E_k = \frac{Mv_ц^2}{2} + \sum_i \frac{m_i(\omega R)^2}{2} = Mv_ц^2 .$$

По закону сохранения энергии приращение кинетической энергии трубы к моменту времени t от начала движения равно убыли потенциальной энергии:

$$Mv_ц^2 = Mgx\sin\alpha ,$$

где x – перемещение центра масс трубы к указанному моменту времени. Дифференцируя это соотношение по времени и замечая, что $v_ц = dx/dt$ и $a_ц = dv_ц/dt$, получим искомое ускорение:

$$a_ц = \frac{1}{2}g\sin\alpha .$$

Из уравнения движения центра масс трубы (рис.3)

$$Ma_ц = Mg\sin\alpha - F_{тр}$$

найдем величину силы трения сцепления:

$$F_{тр} = \frac{1}{2}Mg\sin\alpha .$$

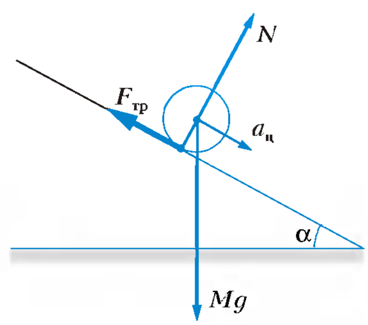


Рис. 3

Если считать, что при качении величина максимальной силы трения равна

$$F_{тр\,m} = \mu N = \mu Mg\cos\alpha ,$$

то качение без проскальзывания будет происходить при условии

$$F_{тр} \le \mu Mg\cos\alpha ,$$

т.е.

$$\operatorname{tg}\alpha \le 2\mu .$$

Так как на скатывающееся тело действует сила трения, может возникнуть вопрос, почему в рассматриваемой задаче можно применять закон сохранения механической энергии. Ответ заключается в том, что при отсутствии скольжения сила трения приложена к тем точкам тела, которые лежат на мгновенной оси вращения, т.е. к точкам, скорость которых равна нулю, а потому приложенная к ним сила трения сцепления работы не совершает. Роль силы трения сцепления сводится к тому, чтобы привести тело во вращение и обеспечить чистое качение (без проскальзывания).

Задача 3. *По клину массой М, находящемуся на гладкой горизонтальной плоскости, скользит шайба массой m.*

Гладкая наклонная плоскость клина составляет с горизонтом угол α. Определите величину ускорения клина a_1. Под каким углом β к горизонту движется шайба? Найдите силу давления F шайбы на клин. Ускорение свободного падения равно g.

Обсудим два способа решения этой задачи.

Первый способ

Внешние силы, действующие на систему клин – шайба, направлены только по вертикали (рис.4). Следовательно, импульс системы в горизонтальном направлении сохраняется:

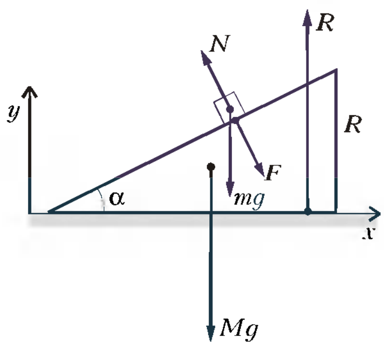


Рис. 4

$$Mv_{1x} + mv_{2x} = 0 .$$

Отсюда дифференцированием по времени получаем

$$Ma_{1x} + ma_{2x} = 0 .$$

Скорость шайбы $\vec{v}_2$ в ЛСО, скорость шайбы $\vec{u}$ относительно клина и скорость клина $\vec{v}_1$ в ЛСО связаны законом сложения скоростей (рис.5):

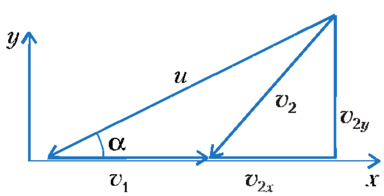


Рис. 5

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{u} ,$$

так что

$$v_{2x} = v_{1x} - u\cos\alpha ,$$

$$v_{2y} = -u\sin\alpha .$$

Подставляя выражение для v_{2x} в выражение закона сохранения импульса, находим

$$u = v_{1x}\frac{m+M}{m\cos\alpha} .$$

С учетом этого соотношения получаем

$$v_{2y} = -v_{1x}\frac{m+M}{m}\operatorname{tg}\alpha ,$$

$$a_{2y} = -a_{1x}\frac{m+M}{m}\operatorname{tg}\alpha .$$

Далее обратимся к энергетическим соображениям. Поскольку силы трения отсутствуют, полная механическая энергия системы клин – шайба сохраняется:

$$\frac{Mv_{1x}^2}{2} + mgy + \frac{mv_{2x}^2}{2} + \frac{mv_{2y}^2}{2} = mgh ,$$

где буквой h обозначена y-координата шайбы при $t = 0$. Дифференцируя это равенство по времени, получаем

$$Mv_{1x}a_{1x} + mgv_{2y} + mv_{2x}a_{2x} + mv_{2y}a_{2y} = 0 .$$

Подстановка в это соотношение полученных выше выражений для $v_{2x}, v_{2y}, a_{2x}, a_{2y}$ приводит (после сокращения на v_{1x}) к ответу на вопрос об ускорении клина:

$$a_{1x} = \frac{1}{2}\frac{m\sin 2\alpha}{M + m\sin^2\alpha}g .$$

Для определения угла β заметим, что в ЛСО шайба движется равноускоренно с нулевой начальной скоростью, так что ее перемещение за любой промежуток времени сонаправлено с вектором ускорения $\vec{a}_2$, тогда

$$\beta = \operatorname{arctg}\left|\frac{a_{2y}}{a_{2x}}\right| = \operatorname{arctg}\left(\frac{m+M}{M}\operatorname{tg}\alpha\right).$$

Горизонтальная составляющая силы давления F шайбы на клин (см. рис.4) сообщает клину ускорение a_{1x}. По второму закону Ньютона,

$$Ma_{1x} = F\sin\alpha .$$

Отсюда находим силу давления:

$$F = \frac{Mm\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}g .$$

Второй способ

Для определения ускорения клина рассмотрим движение каждого из тел. Силы, приложенные к телам, указаны на рисунке 4. Запишем второй закон Ньютона для клина:

$$M\vec{a}_1 = M\vec{g} + \vec{F} + \vec{R}$$

и для шайбы:

$$m\vec{a}_2 = m\vec{g} + \vec{N} .$$

Переходя к проекциям сил и ускорений на оси ЛСО с учетом равенства $\vec{F} = -\vec{N}$, получаем

$$Ma_{1x} = N\sin\alpha ,$$

$$ma_{2x} = -N\sin\alpha ,$$

$$ma_{2y} = mg - N\cos\alpha .$$

Скорость $\vec{v}_2$ шайбы в ЛСО, скорость $\vec{u}$ шайбы относительно клина и скорость $\vec{v}_1$ клина в ЛСО связаны законом сложения скоростей:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{u} .$$

Дифференцируя это равенство по времени, находим связь соответствующих ускорений:

$$\vec{a}_2 = \vec{a}_1 + \vec{w} .$$

Из треугольника ускорений (см. треугольник скоростей на рисунке 5) следует

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_{2y}}{a_{2x} - a_{1x}} .$$

Подставляя в последнее равенство выражения для проекций ускорения шайбы a_{2x} и a_{2y}, после несложных преобразований получаем

$$a_{1x} = \frac{1}{2}\frac{m\sin 2\alpha}{M + m\sin^2\alpha}g .$$

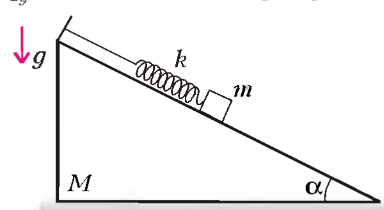


Рис. 6

Задача 4. *На гладкой горизонтальной плоскости лежит клин с углом при вершине α. На гладкой наклонной плоскости клина лежит брусок, связанный с клином пружиной жесткостью k (рис.6). Масса клина M, масса бруска m. Найдите период T малых колебаний системы.*

Предлагаем два способа решения задачи.

Первый способ

Внешние силы, действующие на систему клин – брусок, направлены только по вертикали (рис.7). Следовательно, импульс системы в горизонтальном направлении сохраняется:

$$Mv_1 + mv_{2x} = 0 .$$

Интегрируя это равенство по времени, получаем

$$Mx_1 + mx_2 = 0 .$$

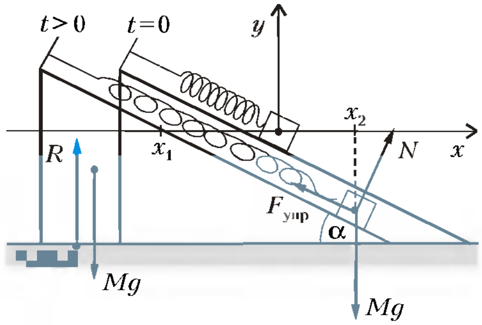


Рис. 7

Начало отсчета ЛСО соответствует такому положению бруска, при котором пружина недеформирована. Из геометрии перемещений (рис.7) с учетом последнего соотношения находим удлинение пружины:

$$\Delta L = \frac{x_2 - x_1}{\cos\alpha} = \frac{x_2}{\cos\alpha}\left(1 + \frac{m}{M}\right)$$

и смещение бруска по вертикали:

$$y_2 = -x_2\left(1 + \frac{m}{M}\right)\operatorname{tg}\alpha$$

в зависимости от координаты x_2 бруска.

Квадратичная относительно смещения x_2 часть потенциальной энергии имеет вид

$$E_p = \frac{k\Delta L^2}{2} = \frac{k}{2\cos^2\alpha}\left(1 + \frac{m}{M}\right)^2 x_2^2$$

(линейные относительно x_2 и y_2 слагаемые сокращаются вблизи положения равновесия). Так как x_1 и y_2 линейны относительно x_2, кинетическая энергия системы клин – брусок будет квадратичной функцией горизонтальной проекции $v_{2x} = x_2'$ скорости шайбы:

$$E_k = \frac{Mv_{1x}^2}{2} + \frac{m}{2}\left(v_{2x}^2 + v_{2y}^2\right) =$$

$$= \frac{m}{2}\left(1 + \frac{m}{M}\right)\left(1 + \left(1 + \frac{m}{M}\right)\operatorname{tg}^2\alpha\right)\left(x_2'\right)^2 .$$

Если механическая система такова, что ее потенциальная и кинетическая энергии выражаются в зависимости от обобщенной координаты q формулами вида

$$E_p = \frac{\gamma}{2}q^2 \quad \text{и} \quad E_k = \frac{\beta}{2}\left(q'\right)^2,$$

то обобщенная координата совершает гармонические колебания с круговой частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} .$$

Тогда в рассматриваемой задаче смещения тел от положения равновесия совершают гармонические колебания с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}\,\frac{\cos^2\alpha + (1 + m/M)\sin^2\alpha}{1 + m/M}} .$$

Второй способ

На брусок действуют три силы: упругости, тяжести и реакции опоры (см. рис.7). По второму закону Ньютона,

$$m\vec{a}_2 = \vec{F}_{упр} + m\vec{g} + \vec{N} .$$

Переходя к проекциям сил и ускорения на оси ЛСО, получаем

$$ma_{2x} = -k\Delta L\cos\alpha + N\sin\alpha ,$$

$$ma_{2y} = k\Delta L\sin\alpha - mg + N\cos\alpha .$$

Подставляя в эти уравнения полученные выше кинематические соотношения

$$\Delta L = \frac{x_2 - x_1}{\cos\alpha} = \frac{x_2}{\cos\alpha}\left(1 + \frac{m}{M}\right)$$

и

$$a_{2y} = -a_{2x}\left(1 + \frac{m}{M}\right)\operatorname{tg}\alpha ,$$

приходим (после исключения N) к уравнению

$$m\left(\cos^2\alpha + \left(1 + \frac{m}{M}\right)\sin^2\alpha\right)a_{2x} = -k\left(1 + \frac{m}{M}\right)x_2 + mg\operatorname{tg}\alpha ,$$

описывающему гармонические колебания смещения бруска относительно положения равновесия, которое определяется соотношением

$$k\Delta L_0 = mg\sin\alpha .$$

Введение новой переменной

$$X_2 = x_2 - \frac{\Delta L_0}{\cos\alpha}$$

приводит последнее уравнение к виду

$$X_2'' = -\omega^2 X_2 ,$$

где

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}\,\frac{1 + m/M}{\cos^2\alpha + (1 + m/M)\sin^2\alpha}} .$$

Это значение циклической частоты совпадает с полученным ранее.

Задача 5*. *Гантель, стоящая на гладкой горизонтальной поверхности, начинает падать вследствие малого отклонения вправо от вертикали. Определите силу F, с которой левый шарик гантели действует на опору за мгновение до удара об опору правого шарика. Масса каждого шарика m. Ускорение свободного падения равно g.*

На гантель действуют силы тяжести и реакции опоры. Центр масс гантели будет двигаться по вертикали (горизонтальные силы отсутствуют, начальная горизонтальная скорость равна нулю). Уравнение движения центра масс в ЛСО имеет вид

$$2m\frac{dv_y}{dt} = -2mg + N .$$

В Ц-системе гантель вращается (рис.8) с угловой скоростью

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} .$$

Скорость нижней точки гантели направлена горизонтально. Следовательно, из правила сложения скоростей при любом угле α получаем

$$v_y = -\omega R\sin\alpha ,$$

где R – половина расстояния между шариками. Продифференцируем это равенство по времени:

$$\frac{dv_y}{dt} = -\left(\frac{d\omega}{dt}R\sin\alpha + \omega^2 R\cos\alpha\right)$$

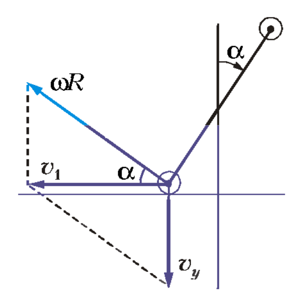


Рис. 8

При $\alpha = \pi/2$ получаем

$$\frac{dv_y}{dt} = -R\frac{d\omega}{dt} .$$

Кинетическая энергия гантели равна

$$\frac{2mv_y^2}{2} + 2\frac{m(\omega R)^2}{2} = m\omega^2R^2\sin^2\alpha + m\omega^2R^2 .$$

Силы трения отсутствуют, поэтому полная механическая энергия сохраняется:

$$m\omega^2R^2\sin^2\alpha + m\omega^2R^2 = 2mgR(1-\cos\alpha) ,$$

т.е. приращение кинетической энергии равно убыли потенциальной. Дифференцируя последнее равенство по времени и полагая $\alpha = \pi/2$, находим

$$R\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2}g .$$

Следовательно, в рассматриваемый момент времени вертикальная проекция ускорения центра масс гантели равна

$$\frac{dv_y}{dt} = -R\frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{2}g .$$

Из уравнения движения центра масс по вертикали находим величину силы реакции опоры:

$$N = 2mg + 2m\frac{dv_y}{dt} = mg .$$

По третьему закону Ньютона,

$$F = N = mg .$$

Читатель, несомненно, испытает радость познания, если найдет решение этой задачи для произвольного угла α.

Задача 6. *Гамма-излучением (поглощением) называется электромагнитное излучение (поглощение) при переходе атомных ядер из возбужденных в более низкие энергетические состояния (и наоборот). Ядро атома олова* ^{119}Sn *движется со скоростью $v = 63$ м/с и испускает в направлении движения γ-квант, который затем поглощается неподвижным свободным ядром олова. Найдите энергию γ-кванта E_γ. Энергия покоя ядра олова $E = m_я c^2 = 113$ ГэВ. Скорость распространения электромагнитных волн в вакууме $c = 3\cdot10^8$ м/с. При испускании и поглощении γ-кванта происходит переход между одними и теми же энергетическими состояниями ядра.*

Фундаментальные законы сохранения позволяют решать задачи не только механики, но и физики микромира. Правда, для решения данной задачи нам понадобятся не только законы сохранения, но и элементарные (в рамках школьной программы) сведения по квантовой и ядерной физике.

Допустим, что при излучении γ-кванта возбужденное ядро олова переходит между состояниями, разность энергий которых равна ΔE. При излучении γ-кванта движущимся ядром олова сохраняются энергия:

$$\Delta E + \frac{p^2}{2m_я} = E_\gamma + \frac{p_1^2}{2m_я}$$

и импульс:

$$p = p_1 + \frac{E_\gamma}{c} ,$$

где p и p_1 – импульсы ядра до и после излучения γ-кванта. Отсюда получаем

$$\Delta E = E_\gamma - \frac{pE_\gamma}{m_я c} + \frac{E_\gamma^2}{2m_я c^2} .$$

При поглощении γ-кванта покоящимся ядром олова тоже сохраняются энергия:

$$E_\gamma = \Delta E + \frac{p_2^2}{2m_я}$$

и импульс:

$$\frac{E_\gamma}{c} = p_2 ,$$

где p_2 – импульс ядра после поглощения γ-кванта. Исключая p_2 из двух последних равенств, находим

$$E_\gamma = \Delta E + \frac{E_\gamma^2}{2m_я c^2} .$$

Подстановка в это соотношение явного выражения для ΔE приводит к ответу на вопрос задачи:

$$E_\gamma = \frac{v}{c}m_я c^2 = \frac{v}{c}E \approx 23{,}7 \text{ кэВ} .$$

Упражнения

1. На гладкой горизонтальной поверхности расположены две точечные массы m, соединенные упругой легкой пружиной жесткостью k (рис.9). На одну из масс налетает со скоростью v третья точечная масса $2m$. Сталкивающиеся массы слипаются. Совершив два полных малых колебания, система сталкивается со стенкой. Определите начальное расстояние s от пружины до стенки.

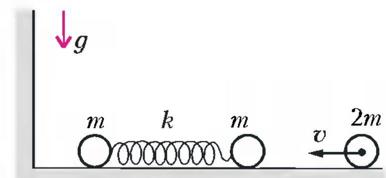


Рис. 9

2. На горизонтальной поверхности покоится клин массой M с углом наклона к горизонту α. Шайба массой m, движущаяся по горизонтальной поверхности со скоростью v_0, въезжает на клин. Через какое время τ шайба съедет с клина? Ускорение свободного падения равно g. Переход с плоскости на клин плавный.

3. Внутри цилиндра массой m подвешен на пружине жесткостью k груз такой же массы. Вначале цилиндр покоится. В некоторый момент времени его отпускают, и он свободно падает, причем ось цилиндра остается вертикальной. Какое расстояние s пройдет цилиндр за время, в течение которого груз совершит полтора колебания? Ускорение свободного падения равно g.

4. Гантель стоит в углу, образованном гладкими плоскостями. Нижний шарик гантели смещают горизонтально на очень маленькое расстояние, и гантель начинает двигаться. Найдите силу реакции N горизонтальной опоры в тот момент, когда верхний шарик оторвется от вертикальной плоскости. Масса каждого шарика гантели равна m. Ускорение свободного падения равно g.

5. Гамма-излучением называется электромагнитное излучение, возникающее при переходе атомных ядер из возбужденных в более низкие энергетические состояния. Свободное покоящееся ядро атома олова ^{119}Sn испускает γ-квант с энергией $E_\gamma = 22{,}5$ кэВ, который затем поглощается таким же ядром олова, движущимся навстречу γ-кванту. Найдите скорость v ядра олова, поглотившего γ-квант. Энергия покоя ядра олова $E = m_я c^2 = 113$ ГэВ. Скорость распространения электромагнитных волн в вакууме $c = 3\cdot10^8$ м/с. При испускании и поглощении γ-кванта происходит переход между одними и теми же энергетическими состояниями ядра.

Материалы вступительных экзаменов 2002 года

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет, май)

1. Найдите дроби $\frac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}$ и $\frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}$, если числа α, β и γ выбраны так, что обе дроби положительны и одна из них втрое больше другой.

2. Решите неравенство

$$\sqrt[3]{2x-x\sqrt{x}-1}+\sqrt{x}+\sqrt[3]{1-2x}\le 0.$$

3. Точка M лежит на боковой стороне CD трапеции $ABCD$. Известно, что $\angle BCD=\angle CBD=\angle ABM=\arccos\frac{5}{6}$ и $AB=9$. Найдите BM.

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\log_{a+1}x+\log_x(19-8a)=2$$

имеет по крайней мере два корня и при этом произведение всех его корней не меньше 0,01.

5. Сфера высекает на ребрах AB, CB, AS и CS треугольной пирамиды $SABC$ равные отрезки KL, NM, K_1L_1 и N_1M_1 соответственно (точки K и K_1 лежат ближе к A, чем L и L_1, а точки N и N_1 лежат ближе к C, чем M и M_1). Известно, что $MM_1=2KK_1$ и $2KN=3L_1M_1$, $\angle SBA=\angle SBC$ и $\angle KK_1N_1==90^\circ$. Найдите отношение объемов пирамид $SABC$ и M_1KLMN.

6. При каких x оба числа $\frac{x^2+4x-1}{7x^2-6x-5}$ и $\frac{1-x}{1+x}$ целые?

Вариант 2

(механико-математический факультет)

1. Решите неравенство

$$\log_{\frac{2}{3}}\frac{x}{x+1}+\log_{\frac{1}{2}}\frac{x+1}{3x}\ge 2.$$

2. Три сферы, радиусы которых соответственно равны $\sqrt{6}$, 1 и 1, попарно касаются друг друга. Через прямую, содержащую центры A и B второй и третьей сфер, проведена плоскость γ так, что центр O первой сферы удален от этой плоскости на расстояние 1. Найдите угол между проекциями прямых OA и OB на плоскость γ и сравните его с $\arccos\frac{4}{5}$.

3. Из пункта A в пункт C выехал с постоянной скоростью велосипедист. За два километра до промежуточного пункта B он решил, что необходимо ехать быстрее, и, увеличив скорость в пункте B, продолжил движение с постоянной скоростью вплоть до пункта C. Приехав в C, велосипедист обнаружил, что время движения с каждой из скоростей было прямо пропорционально соответствующей скорости и что на первые 18 км пути он затратил времени в полтора раза больше, чем на последние 18 км. Найдите расстояние между пунктами A и B, если известно, что расстояние между A и C равно 75 км.

4. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Точка X лежит на его стороне AD, причем $BX\parallel CD$ и $CX\parallel BA$. Найдите BC, если $AX=\frac{3}{2}$ и $DX=6$.

5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых сумма арктангенсов корней уравнения

$$x^2+(1-2a)x+a-4=0$$

больше $\frac{\pi}{4}$.

6. Найдите минимальное значение выражения $(x+y-z)^2$ при условии, что числа x, y и z удовлетворяют одновременно каждому из неравенств $1\le(x+y)^2\le\frac{4}{3}$, $8\le(y+z)^2\le 9$ и $10\le(z+x)^2\le 11$.

Вариант 3

(факультет вычислительной математики и кибернетики, апрель)

1. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости Oxy условиями

$$\begin{cases}3y+x\ge -5,\\ 6\sqrt{y+1}\le 6-4y,\\ x\le 0.\end{cases}$$

2. Решите неравенство

$$\left|6-\log_2\left(4x^2-20x+25\right)\right|\cdot\log_{5-2x}32\le 5.$$

3. Даны две окружности. Первая из них вписана в треугольник ABC, вторая касается стороны AC и продолжений сторон AB и BC. Известно, что эти окружности касаются друг друга, сумма кубов их радиусов равна 152, а угол BAC равен $\arccos\frac{1}{4}$. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

4. Найдите $\operatorname{tg}|x|$, если известно, что

$$\left(5\sin x+3\cos x+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{11}-3\sqrt{\sin|x|}\right)=0.$$

5. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases}\sin\left(2\pi\sqrt{a^2-x^2}\right)=0,\\ 2\cdot 3^{|ax|}+3^{2-|ax|}\le 19\end{cases}$$

имеет наибольшее число решений?

6. Рассматриваются всевозможные параллелепипеды с четырьмя ребрами длины 4 и остальными ребрами длины 3, в которые можно вписать шар. Найдите максимальное значение радиуса такого шара.

Вариант 4

(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. При каких значениях параметра b уравнение

$$b^4x + b^2 + (2+\sqrt{2})b + 2\sqrt{2} = b^2(b+\sqrt{2}) + 4x$$

имеет бесконечно много корней?

2. Решите неравенство

$$2\cos(\arcsin x) - \sin\left(\frac{1}{2}\arccos x\right) \le 0.$$

3. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AD = 6$, $AB = 3$ и $AA_1 = 2$. Найдите угол между прямой AC_1 и прямой, проходящей через середины ребер AA_1 и B_1C_1.

4. Из пункта A в пункт B в 8 часов утра вышел пешеход. Спустя два часа из пункта A вслед за пешеходом по той же дороге выехали велосипедист и мотоциклист. Известно, что скорость мотоциклиста в три раза больше скорости велосипедиста. Не позднее чем через 15 минут после своего выезда из пункта A мотоциклист обогнал пешехода и продолжил путь в пункт B. Велосипедист обогнал пешехода спустя не менее 45 минут после обгона пешехода мотоциклистом. Пешеход прибыл в пункт B в 14 часов того же дня. Найдите время прибытия мотоциклиста в пункт B.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{13\cos x + 98\sin y} - \sqrt{13\cos x + 28\sin y} = 4,\\ 2\sqrt{13\cos x + 28\sin y} - \sqrt{70\sin y + 8} = 2.\end{cases}$$

6. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает сторону BC в точке D. Окружность радиуса 35, центр которой лежит на прямой BC, проходит через точки A и D. Известно, что $AB^2 - AC^2 = 216$, а площадь треугольника ABC равна $90\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Вариант 5

(физический факультет, май)

1. Решите уравнение

$$\frac{\log_2(4x-3)}{\log_3 x} = \frac{2}{\log_3 2}.$$

2. Решите уравнение

$$\cos 8x \operatorname{ctg} x + 2\sin^2 4x = \operatorname{ctg} x.$$

3. Решите уравнение

$$4 + \sqrt{x+9} = |x+5|.$$

4. В треугольнике ABC $AB = 14$, $BC = 6$, $AC = 10$. Биссектрисы BD и CE пересекаются в точке O. Найдите OD.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}2^{x+1}\log_9 y - 2^{2x} = 2,\\ 9\cdot 2^x \log_{27} y - \log_3^2 y = 9.\end{cases}$$

6. Окружность проходит через вершину B треугольника ABC, касается стороны AC в ее середине D и пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно, $AB : BC = 3 : 2$. Найдите отношение площади ΔAMD к площади ΔDNC.

7. Для каждого значения a решите неравенство

$$(x^2 + 2x - a^2 - 4a - 3)(\sin x + 2x) > 0.$$

8. В треугольной пирамиде $SABC$ ребро SC перпендикулярно грани ABC, $\angle ACB$ – прямой, $AC = 1$, $BC = 2$, $SC = 4\sqrt{5}/5$. Сфера касается плоскостей SCA, SCB и ABC, причем плоскости ABC она касается в точке, лежащей на отрезке AB. Найдите:

1) радиус сферы;

2) радиус окружности, по которой пересекаются сфера и грань ASB.

Вариант 6

(физический факультет)

1. Решите уравнение

$$\cos 5x - \cos 15x = \frac{3\sqrt{3}}{2}\operatorname{ctg} 5x.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{2-x}}{3-2x} < 1.$$

3. Решите неравенство

$$15\cdot\frac{4^{x-2}}{4^x - 3^x} > 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^x.$$

4. Около окружности радиуса 3 описана равнобедренная трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$), площадь которой равна 48. Окружность касается сторон AB и CD в точках K и L. Найдите KL.

5. Три числа, сумма которых равна 28, образуют геометрическую прогрессию. Если к первому числу прибавить 3, ко второму числу прибавить 1, а от третьего числа отнять 5, то полученные числа образуют арифметическую прогрессию. Найдите эти числа.

6. В пирамиде $SBCD$ каждое ребро равно 3. На ребре SB взята точка A так, что $SA : AB = 1 : 2$. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды $SACD$.

7. Для каждого значения a решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{9}}(x^2 - 6x - a^2 - 5a + 12) < -1$$

и найдите, при каких значениях a множество точек x, не являющихся решениями этого неравенства, представляет собой отрезок числовой оси, длина которого меньше $2\sqrt{3}$.

8. В треугольнике KLM отношение радиусов описанной и вписанной окружностей равно 3. Вписанная окружность касается сторон ΔKLM в точках A, B и C. Найдите отношение площади ΔKLM к площади ΔABC.

Вариант 7

(химический факультет, факультет наук о материалах)

1. Решите уравнение

$$4^{\frac{1}{x}} - 5\cdot 2^{2+\frac{1}{x}} + 64 = 0.$$

2. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}|x| + |y-1| \le 1,\\ |x-2| + |y-1| \le 1.\end{cases}$$

3. Решите неравенство

$$\log_{17-x^2}(56 - x^2 + 10x) \le \frac{1}{2}\left(\log_{3+\sqrt{7}}(8 + 3\sqrt{7}) + \log_{3+\sqrt{7}} 2\right).$$

4. Решите уравнение

$$\left(63\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right)\cos^2 x = \operatorname{tg}^2 2x + \sin^2 x.$$

5. Из точки C проведены две касательные к окружности. Точки A и B – точки касания. На окружности взята произвольная точка M, отличная от A и B. Из точки M опущены перпендикуляры MN, ME, MD на стороны AB, BC, CA

соответственно. Найдите площадь треугольника MNE, если $MN = 4$, $MD = 2$ и $\angle ACB = 120^\circ$.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$2^{-x^2} \cdot 4^x + \sin\frac{\pi x}{4} + \cos\frac{\pi x}{4} - 2 = a^3 - 3a^2 + a + \sqrt{2}$$

имеет единственное решение.

Вариант 8

(факультеты биологический, фундаментальной медицины и биоинженерии и биоинформатики)

1. Решите неравенство

$$|x-2| > 2x+1.$$

2. Решите уравнение

$$\sin^2 2x + \sin^2 3x = 1.$$

3. Длины сторон треугольника ABC равны 4, 6 и 8. Вписанная в этот треугольник окружность касается его сторон в точках D, E и F. Найдите площадь треугольника DEF.

4. Решите неравенство

$$\log_2^2|2x| - 5\log_2|2x| + 2|x|\log_2|2x| - 4|x| + 6 \geq 0.$$

5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left(x^2 + 2(a-2)x + a^2 - 4a\right)^2 + \\ + (a+5)\left(x^2 + 2(a-2)x + a^2 - 4a\right) - a^2 + 8a + 2 = 0$$

имеет: а) единственное решение; б) ровно два различных решения.

Вариант 9

(факультет почвоведения)

1. Решите неравенство

$$|5-7x| < 2.$$

2. Вычислите $\cos\frac{5\pi}{8}$.

3. Пусть $a = \sqrt[3]{20} + \sqrt[3]{50}$. Докажите, что число $a^3 - 30a$ целое, и найдите его.

4. Решите неравенство

$$\log_3\log_4 x \leq \log_9\log_2 8x.$$

5. Найдите все значения x, принадлежащие интервалу $(-\pi; \pi)$ и являющиеся решениями уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{-2\sin x}} = \sqrt{-2\cos x}.$$

6. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна c, а один из острых углов равен α. В треугольник помещены две окружности одинакового радиуса, каждая из которых касается одного из катетов, гипотенузы и другой окружности. Найдите радиусы этих окружностей.

7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{\left(x^3-1\right)\left(x^2-16\right)}{\log_{10}(15a-x) - \log_{10}(x-a)} = 0$$

имеет единственное решение.

Вариант 10

(геологический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{x|x|+1}{x-2} + 1 \geq x.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{x-y}\dfrac{xy}{2} = 2, \\ x+y = xy+1. \end{cases}$$

3. Решите неравенство

$$3^{2-x} + 6\cdot\left(\sqrt{3}\right)^{2-2x} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2+x-2}-3}.$$

4. Пункт C расположен между пунктами A и B, $AC = 2BC$. Из пунктов C и B одновременно навстречу друг другу вышли два поезда. Время, затраченное вторым поездом на путь от B до A, не менее чем в 6 раз превосходит время, затраченное первым поездом на путь от C до B. Третий поезд, скорость которого равна разности скоростей первых двух, затратил на путь от A до B не менее чем в 9 раз больше времени, чем первый поезд затратил на путь от C до места встречи со вторым. Чему равно отношение скоростей первого и второго поездов?

5. Найдите все решения уравнения

$$|\sin 2x| + \cos x = 0,$$

принадлежащие отрезку $\left[-\sqrt{3}; \frac{8}{3}\right]$.

6. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведены биссектриса CD и прямая DE, перпендикулярная CD (точка E лежит на прямой AC). Найдите площадь треугольника ABC, если $CE = 4$, $CA = 3$.

7. При каких значениях параметра a периметр плоской фигуры, заданной на координатной плоскости Oxy системой

$$\begin{cases} y \leq \sqrt{1-x^2}, \\ a|y| \leq |x|, \end{cases}$$

больше, чем $4 + 2\sqrt{2} + \frac{\pi}{2}$?

8. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ с длиной ребра, равной 1, на вертикальном ребре AA' и на горизонтальном ребре AB взяты точки M и N соответственно, при этом $AM = \frac{1}{3}$, $AN = \frac{3}{4}$. Через точки M и N проведена плоскость, параллельная диагонали AC нижнего основания куба. Чему равна площадь получившегося сечения?

Вариант 11

(географический факультет)

1. Решите уравнение

$$|x-2| = \frac{1}{x-2}.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{4\sin x - 3}{4\sin^2 x + \sin x - 3} = 2.$$

3. Квадратное уравнение $x^2 - 6px + q = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2. Числа p, x_1, x_2, q – четыре последовательных члена геометрической прогрессии. Найдите x_1 и x_2.

4. Тележка с передними колесами диаметром 30 см и задними колесами диаметром 40 см движется по прямой дороге, проходящей через точки A и B. Между точками A и B ровно 100 метров. Точка A покрашена. Через точку A проезжают правые колеса тележки и в точках соприкосновения с ней красятся. В свою очередь, при каждом соприкосновении с дорогой эти точки оставляют свой след в виде точек на дороге. Никакие точки на дороге, кроме точки A, не окрашивают колеса. Тележка движется от точки A к точке B. Найдите:

а) наименьшее расстояние между соседними окрашенными точками;

б) количество окрашенных точек на отрезке AB.

5. В треугольнике PQR точка T лежит на стороне PR, $\angle QTR = \angle PQR$, $PT = 8$, $TR = 1$. Найдите:

а) сторону QR;

б) угол QRP, если радиус описанной около треугольника PQT окружности равен $3\sqrt{3}$.

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 = 5x + y, \\ y^3 = 5y + x. \end{cases}$$

Вариант 12

(филологический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{\log_{x^6} \pi \cdot \arcsin \dfrac{x}{2}}{\sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) \cdot \sqrt{x}} \geq 0\,.$$

2. Окружность радиуса 3 проходит через середины трех сторон треугольника ABC, в котором величины углов A и B равны 60° и 45° соответственно. Найдите площадь треугольника.

3. Решите уравнение

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x + \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) + \sqrt{3}(\cos x - \sin x)} = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}\,.$$

4. Положительное число a подобрано так, что меньший корень уравнения

$$x^3 + 2x = 4x^2 - 4$$

является одновременно одним из решений неравенства

$$a^{5x-4} > a^{-x^2+4x-4}\,.$$

Решите это неравенство.

5. В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар радиуса 6, а боковая грань составляет угол 45° с высотой пирамиды.

а) Найдите площадь основания пирамиды.

б) В данную пирамиду вписан второй шар так, что он касается всех боковых граней и первого шара; затем вписан третий шар, касающийся всех боковых граней и второго шара, и т.д. Найдите сумму объемов бесконечной системы вписанных шаров.

6. Словарь людоедов из племени «Мумбо-Юмбо» составляет 300 слов. Эллочка Щукина легко и свободно обходилась тридцатью.

Однажды людоед начал посещать проповеди миссионера, поэтому его словарный запас, оставаясь целочисленным, стал увеличиваться на некоторое число процентов за каждые полгода. Эллочка поступила в вечернюю школу и каждый месяц стала узнавать целое число новых слов, равное 50% от того количества слов, которое людоед знал к концу первого полугодия. Однако через несколько месяцев Эллочка бросила школу.

Какое наибольшее целое число месяцев может проучиться Эллочка в школе, чтобы словарь людоеда после одного года посещения проповедей обязательно остался богаче словаря Эллочки?

Вариант 13

(экономический факультет, отделение экономики)

1. Докажите или опровергните следующее утверждение: периметр ромба с диагоналями 1 и 3 больше длины окружности радиуса 1.

2. Решите неравенство

$$\left(1 - \frac{2x}{5}\right)^{7+11x-6x^2} \geq 1\,.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - xy - x = 11, \\ xy^2 - x^2y = -30. \end{cases}$$

4. Бригада рабочих выполняет задание за 42 дня. Если бы в бригаде было на 4 человека больше и каждый рабочий бригады работал бы на 1 час в день дольше, то это же задание было бы выполнено не более чем за 30 дней. При увеличении бригады еще на 6 человек и рабочего дня еще на 1 час все задание было бы закончено не ранее чем через 21 день. Определите наименьшую при данных условиях численность бригады, а также продолжительность рабочего дня.

5. Решите уравнение

$$\log_2\left(\cos 3\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\right) \cdot \log_2(\cos 2x) + \log_2(\sin 5x + \sin x) = 0.$$

6. Найдите все значения a, при которых неравенство

$$\sqrt[4]{x^2 - 6ax + 10a^2} + \sqrt[4]{3 + 6ax - x^2 - 10a^2} \geq$$

$$\geq \sqrt[4]{\sqrt{3}a + 24 - \frac{3}{\sqrt{2}} + \left|y - \sqrt{2}a^2\right| + \left|y - \sqrt{3}a\right|}$$

имеет единственное решение.

7. Равные кубы A и B, имеющие общую вершину, расположены так, что ребро куба A лежит на диагонали куба B, а ребро куба B лежит на диагонали куба A. Найдите объем общей части этих кубов, если длина их ребер равна 1.

Вариант 14

(факультет психологии)

1. Решите неравенство

$$\sqrt{x+1} > x - 2\,.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{x+1}\left(x^2 + 3x - 10\right) > 2\,.$$

3. Решите уравнение

$$2^{2^x} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^x - 1} = 3\,.$$

4. На катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность. Она пересекает сторону AB в точке E. На стороне BC взята точка G так, что отрезок AG пересекает окружность в точке F, причем отрезки EF и AC параллельны, $BG = 2GC$ и $AC = 2\sqrt{3}$. Найдите GF.

5. Решите уравнение

$$\cos 6x - 3\cos 5x + \cos 4x - 4\cos x + 5 = 0\,.$$

6. Решите уравнение

$$\left|x^3+7x^2-11x-6\right|+\left|x^3-12x^2-5x+3\right|=18x^2-2x-13.$$

Вариант 15

(социологический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{3x+10}=x+2.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{5}\sqrt{x^3+x^2+x-14}}\left(\log_{\frac{1}{4}}\left(-x^2+5x-6\right)\right)<0.$$

3. Определите угол A треугольника между сторонами, равными 2 и 4, если медиана, выходящая из вершины A, равна $\sqrt{7}$.

4. Куплен товар двух сортов: первого на 1200 руб. и второго на 1500 руб. Товара второго сорта куплено на 10 кг больше, чем первого, а по цене (за 1 кг) на 20 руб. меньше. Сколько куплено товара первого сорта?

5. В шар радиуса R вписана четырехугольная пирамида с квадратным основанием. Одно из боковых ребер пирамиды перпендикулярно плоскости основания, а наибольшее боковое ребро образует с ней угол α. Найдите боковую поверхность пирамиды и вычислите ее значение при $\alpha=\arcsin\sqrt{\frac{8}{17}}$, $R=\sqrt{17}$.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(1+a)x^2+(1-a)x+a+3=0$$

имеет по крайней мере один корень и все его корни являются целыми числами.

Вариант 16

(Институт стран Азии и Африки)

1. Решите неравенство

$$\frac{2^x-2^{2-x}-3}{2^x-2}\ge 0.$$

2. Решите уравнение

$$\sin 4x+2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}=0.$$

3. Решите неравенство

$$x\sqrt{2-x}\le x^2-x-2-\sqrt{2-x}.$$

4. Решите неравенство

$$\left|\log_{x+1}2+\log_2\frac{x+1}{4}\right|+\left|\log_2(4x+4)+\log_{x+1}2\right|<\frac{17}{2}.$$

5. В треугольнике ABC даны длины сторон $AB=8$, $BC=6$ и биссектриса $BD=6$. Найдите длину медианы AE.

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\arccos 2y+\arcsin 3x=\dfrac{\pi}{4},\\ \arcsin 2y\cdot\arccos 3x=\dfrac{5\pi^2}{64}.\end{cases}$$

Для каждого решения $(x;y)$ определите, какое из чисел больше: $2y-3x$ или $\sqrt[4]{2}-0{,}5$.

7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}x^2+y^2-6|x|-6|y|+17\le 0,\\ x^2+y^2-2y=a^2-1\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Вариант 17

(факультет государственного управления)

1. Из деревни в город вышел турист. Первую половину пути он шел пешком со скоростью 5 км/ч, а затем оставшуюся часть пути ехал на автобусе. Найдите среднюю скорость движения туриста на всем маршруте, если скорость автобуса равна 45 км/ч.

2. Решите уравнение

$$4^x-3\cdot 2^{x+\frac{1}{2}}-8=0.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{-1}{\dfrac{8}{9-x^2}+1}\le 3-x.$$

4. На окружности радиуса 5, описанной около правильного треугольника, взята точка D. Известно, что расстояние от точки D до одной из вершин треугольника равно 9. Найдите сумму расстояний от точки D до двух других вершин треугольника.

5. Одна труба наполняет бассейн на 2 часа, а другая – на 4 часа 30 минут дольше, чем наполняют этот бассейн обе трубы, открытые одновременно. За сколько часов может наполнить бассейн каждая труба в отдельности?

6. Найдите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases}\left(3\sqrt{x|x|}+|y|-3\right)\left(|x|+3|y|-9\right)=0,\\ (x-a)^2+y^2=25\end{cases}$$

имеет ровно три решения.

7. Пять пиратов делят 10 слитков золота. Процедура дележа устроена так: сначала старший пират предлагает дележ по своему выбору. Если больше половины пиратов его отвергает, второй по старшинству пират предлагает новый дележ добычи среди оставшихся четырех (старший пират никакого участия в дальнейшем дележе не принимает). Если новый дележ отвергается большинством голосов, то предлагавший его пират от дальнейшего участия в дележе устраняется, и процедура повторяется для трех пиратов. Как будут распределены слитки золота, если каждый пират из двух данных дележей предпочитает тот, в котором его доля золотых слитков больше?

ФИЗИКА

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. Катушку, лежащую на горизонтальной плоскости, тянут за намотанную на ее среднюю часть легкую нерастяжимую нить так, что ее конец A движется со скоростью v под углом $\alpha=30^\circ$ к горизонту (рис.1). При этом катушка катится без проскальзывания, а ее ось не изменяет своей ориентации. Найдите скорость движения оси катушки, если радиус r средней части катушки в $n=2$ раза меньше радиуса R ее щек.

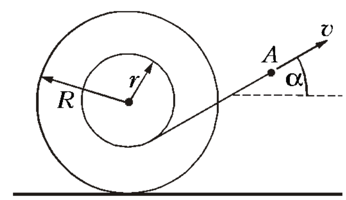


Рис. 1

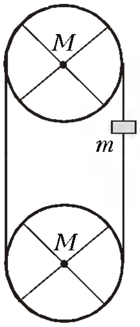


Рис. 2

2. На свободно вращающиеся ободы двух одинаковых велосипедных колес, центры которых лежат на одной вертикали, а оси закреплены горизонтально и параллельны, натянута легкая шероховатая нерастяжимая нить, концы которой прикреплены к грузу массой m, удерживаемому вблизи верхнего обода (рис.2). Толщина обода много меньше его радиуса, а масса обода много больше массы спиц и втулки колеса и равна M. С каким ускорением будет двигаться груз после его освобождения до момента касания нижнего обода?

3. На рисунке 3 показана упрощенная схема кривошипно-шатунного механизма паровоза. Когда ось A крепления шатуна к колесу находится выше оси O колеса, давление справа от поршня равно атмосферному $p_а$, а слева от него давление поддерживают равным $p > p_а$; когда ниже, то давление слева $p_а$, а справа p. Радиус колеса R, $AO = r$, площадь поршня S. Найдите максимальную горизонтальную силу, с которой колесо действует на свою ось.

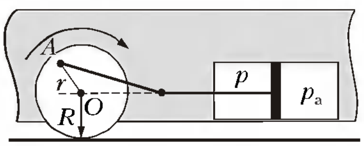


Рис. 3

4. Два диска, масса одного из которых в $n = 2$ раза больше другого, прикрепили к концам легкой пружины так, чтобы их центры масс лежали на вертикали, совпадающей с осью пружины, если один из дисков положить на горизонтальный стол. Вначале на стол положили более тяжелый диск. Оказалось, что период малых гармонических вертикальных колебаний верхнего диска равен $T = 0{,}2$ с. Затем пружину с дисками перевернули так, что внизу оказался более легкий диск. При каких амплитудах вертикальные колебания тяжелого диска могут оставаться гармоническими, если возникающие при этом деформации пружины можно считать малыми?

5. Прочный баллон емкостью $V = 60$ л заполнили смесью водорода и кислорода под давлением $p_1 = 3{,}24$ атм при температуре $t_1 = 27$ °С. Масса смеси газов $m = 60$ г. Затем в баллоне произвели электрический разряд, вызвавший химическую реакцию $2H_2 + O_2 = 2H_2O$. Найдите давление в баллоне после остывания его содержимого до температуры $t_2 = 100$ °С.

6. В тепловом двигателе в качестве рабочего вещества используют один моль идеального одноатомного газа. Цикл двигателя состоит из изобары, изохоры и адиабаты. КПД цикла η. Максимальная температура газа в цикле T_1, минимальная T_3. Зная, что максимальная температура реализуется при адиабатическом процессе, найдите работу, совершаемую над газом при его сжатии.

7. В плоский конденсатор вставили две пластины одинаковой толщины, заполнившие все пространство между его обкладками, причем так, что каждая из пластин касается одной из обкладок и другой пластины. Удельное сопротивление материала первой пластины ρ_1, второй ρ_2. Расстояние между обкладками конденсатора d. Между пластинами поддерживается постоянное напряжение U. Найдите плотность поверхностного заряда на границе соприкосновения пластин.

8. Равносторонний треугольник массой m, изготовленный из жесткой тонкой проволоки, может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его вершину A параллельно противоположной стороне DC. Длина стороны треугольника a. Сторона DC лежит на опоре так, что плоскость треугольника горизонтальна. Треугольник находится в однородном магнитном поле, линии индукции которого горизонтальны и перпендикулярны оси вращения. Найдите величину B индукции поля, при которой треугольник не будет давить на опору, если по нему течет постоянный ток I.

9. С помощью объектива, состоящего из собирающей и рассеивающей линз с фокусными расстояниями $F_1 = 20$ см и $F_2 = -20$ см соответственно, находящихся на расстоянии $L = 16$ см друг от друга, получили изображение Солнца. Найдите фокусное расстояние F тонкой линзы, с помощью которой можно получить изображение Солнца того же размера, что и с помощью объектива. Линзы объектива считать тонкими, а их главные оптические оси совпадающими.

10. На верхней горизонтальной плоскости пластинки из стекла с показателем преломления $n = 1{,}5$ сделано широкое клинообразное углубление, профиль которого показан на поперечном сечении пластинки, изображенном на рисунке 4. Сверху на пластинку падает параллельный пучок фотонов, движущихся вертикально вниз. При этом на матовой нижней плоскости пластинки наблюдается интерференционная картина. Зная, что толщина пластинки $H = 10$ см, энергия отдельного фотона $W = 4 \cdot 10^{-19}$ Дж, а угол $\alpha = 0{,}02$ рад, определите наибольший порядок максимума в наблюдаемой интерференционной картине.

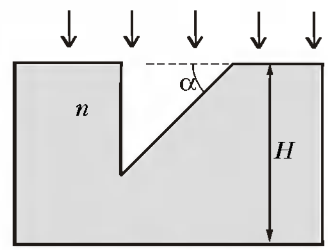


Рис. 4

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. На гладком горизонтальном столе покоятся два одинаковых кубика массой M каждый. В центр левого кубика попадает пуля массой m, летящая горизонтально со скоростью, равной v_0 и направленной вдоль линии, соединяющей центры кубиков. Пробив насквозь левый кубик, пуля летит дальше со скоростью $v_0/2$, попадает в правый кубик и застревает в нем. Через какое время τ после попадания пули в левый кубик кубики столкнутся, если начальное расстояние между ними равно L? Размерами кубиков пренебречь.

2. На горизонтальном столе покоится клин массой $M = 4$ кг. Сверху на клин падает шарик массой $m = 1$ кг. Определите угол при основании клина α, если известно, что после упругого удара о клин шарик отскочил под углом $\beta = 45°$ к вертикали. Трением пренебречь.

3. Два вертикальных сообщающихся цилиндра заполнены водой и закрыты поршнями с массами $M_1 = 1$ кг и $M_2 = 2$ кг. В положении равновесия левый поршень расположен выше правого на $h = 10$ см. Когда на левый поршень поместили гирю массой $m = 2$ кг, поршни в положении равновесия оказались на одной высоте. Какова будет разность высот поршней H в положении равновесия, если гирю перенести на правый поршень?

4. Маленький шарик, подвешенный на нити, отклоняют от положения равновесия и отпускают без начальной скорости. Определите, с каким ускорением a_1 начнет двигаться шарик, если известно, что в момент прохождения шариком нижней точки траектории его ускорение равно $a_2 = 15$ м/с^2. Нить считать невесомой и нерастяжимой, сопротивление воздуха не учитывать. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

5. Стакан объемом $V_0 = 290$ см^3 перевернули вверх дном и медленно погрузили в воду на глубину $h = 5$ м. При этом объем воздуха в стакане оказался равным $V_1 = 194$ см^3.

Найдите парциальное давление водяного пара, находящегося в стакане, считая его насыщенным. Относительная влажность атмосферного воздуха $\varphi = 60\%$, атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, плотность воды $\rho = 1$ г/см^3, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Температуру воздуха в стакане считать постоянной. Размером стакана по сравнению с глубиной его погружения пренебречь.

6. В цилиндрическом сосуде с площадью основания $S = 11$ см^2 находится кубик льда массой $m = 11$ г при температуре $t = -10$ °С. Какое минимальное количество теплоты Q нужно сообщить льду для того, чтобы при дальнейшем нагревании уровень воды в сосуде не изменялся? Удельная теплоемкость льда $c = 2{,}1$ Дж/(г · К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ Дж/г, плотность льда $\rho_л = 0{,}9$ г/см^3. При расчете принять, что при плавлении кусок льда сохраняет форму куба.

7. Расстояние l между двумя одинаковыми металлическими шариками намного больше их радиусов. Когда на шарики поместили некоторые заряды, сила отталкивания между ними оказалась равной F_1. После того, как шарики соединили тонкой проволокой, а затем убрали ее, шарики стали отталкиваться с силой F_2. Определите первоначальные заряды шариков q_1 и q_2. Электрическая постоянная равна ε_0.

8. Реостат включен в цепь, как показано на рисунке 5. Положение его движка характеризуется коэффициентом α ($0 \le \alpha \le 1$). При каком α в реостате будет выделяться максимальная мощность? Напряжение на клеммах цепи постоянно.

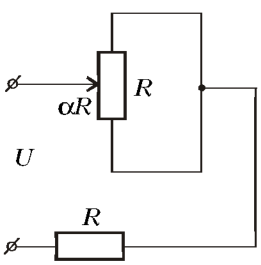


Рис. 5

9. Вне прозрачного шара вплотную к его поверхности помещен точечный источник света. При каких значениях показателя преломления материала шара n все выходящие из него лучи будут наклонены по направлению к оси, проведенной через источник и центр шара?

10. Человек, страдающий дальнозоркостью, рассматривает предмет, находящийся на расстоянии $d = 20$ см перед его глазами. При этом изображение предмета оказывается смещенным за поверхность сетчатки глаза на $b = 2{,}2$ мм. Определите оптическую силу D контактной линзы, устраняющей это смещение. Считать, что оптическая система глаза представляет собой тонкую линзу с фокусным расстоянием $F = 2$ см, а контактная линза вплотную примыкает к ней.

Химический факультет

1. Материальная точка движется прямолинейно и равноускоренно, проходя два последовательных отрезка пути l_1 и l_2 за времена t_1 и t_2 соответственно. Найдите ускорение точки.

2. Из одной точки над поверхностью земли вылетают одновременно две частицы с горизонтальными и противоположно направленными скоростями $v_1 = 4$ м/с и $v_2 = 9$ м/с. Через какое время угол между направлениями скоростей этих частиц станет 90°? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

3. На краю стола высотой $h = 0{,}8$ м лежит маленький шарик. В него попадает тело, масса которого много больше массы шарика. Скорость тела $v_0 = 10$ м/с. Удар абсолютно упругий. На каком расстоянии от стола шарик упадет на землю?

4. На дне сосуда на одной из своих боковых граней лежит треугольная призма. В сосуд налили жидкость плотностью ρ_0 так, что уровень жидкости сравнялся с верхним ребром призмы. Какова плотность материала призмы, если сила давления призмы на дно увеличилась в 3 раза? Жидкость под призму не подтекает. Атмосферное давление не учитывать.

5. В некотором процессе давление одного моля идеального одноатомного газа уменьшалось с увеличением объема газа по линейному закону таким образом, что в конечном состоянии его объем увеличился в $k = 2$ раза, а давление уменьшилось в $n = 3$ раза. Полагая $R = 8{,}3$ Дж/(моль · К), найдите работу, совершенную газом в этом процессе, а также изменение его внутренней энергии. Начальная температура газа составляла $T_1 = 300$ К.

6. В герметично запаянном сосуде объемом $V_0 = 1{,}1$ л находится $M = 100$ г кипящей воды и пар массой m при температуре $t = 100$ °С. Найдите массу пара. Плотность воды $\rho_0 = 10^3$ кг/м^3. Считать, что воздух в сосуде отсутствует. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, молярная масса воды М = 0,018 кг/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль · К).

7. В изображенной на рисунке 6 электрической схеме $R_1 = R_2 = R_3$, $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$. Определите отношение энергий конденсатора при положениях ключа *1* и *2*. Внутренним сопротивлением источников пренебречь. Диод считать идеальным.

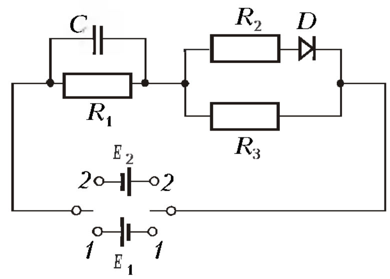


Рис. 6

8. На горизонтальном диэлектрическом диске, вращающемся вокруг своей оси, на расстоянии r от оси находится небольшое тело массой m, имеющее заряд q. Диск находится в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, направленной вдоль оси вращения. Коэффициент трения между телом и диском μ. Найдите максимальную угловую скорость вращения диска, при которой тело еще не соскальзывает с диска. Поляризацию диска не учитывать.

9. В воде точечный источник света движется вертикально вниз со скоростью $v = 1$ м/с. Определите скорость u движения границы светового пятна на поверхности воды (рис.7). Показатель преломления воды принять равным $n = 4/3$.

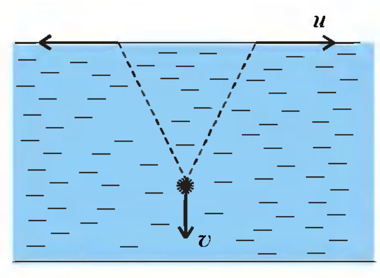


Рис. 7

10. Изображение предмета на матовом стекле фотоаппарата при фотографировании с расстояния $l_1 = 15$ м получилось высотой $h_1 = 30$ мм, а с расстояния $l_2 = 9$ м – высотой $h_2 = 51$ мм. Найдите фокусное расстояние объектива фотоаппарата.

Публикацию подготовили П.Бородин, В.Власов, В.Воронин, Е.Григорьев, Д.Денисов, Н.Лёвшин, Г.Медведев, А.Невзоров, А.Павликов, В.Панферов, В.Погожев, М.Потапов, А.Разгулин, Н.Сергеев, $\boxed{\text{М.Смуров}}$, В.Тихомиров, В.Ушаков, М.Федотов, Е.Хайлов, С.Чесноков, Е.Шикин

Конкурс «Математика 6–8»

(см. «Квант» №4 за 2002 г.)

1. Покажем, что важное множество может состоять не менее чем из 24 клеток.

Любой составленный из клеток доски прямоугольник размером 1×8, 1×9 или 1×10 должен содержать не менее 2 клеток важного множества. Соответственно, в двух соседних верхних горизонталях доски должно быть не менее 4 клеток важного множества. Если мысленно убрать эти горизонтали, то из оставшейся части доски 8×10 можно образовать 8 прямоугольников размера 1×8, каждый из которых должен включать не менее 2 клеток важного множества. Таким образом, всего в важном множестве должно быть не менее $4+2\times 10=24$ клетки. Пример важного множества, состоящего из 24 клеток, показан на рисунке 1.

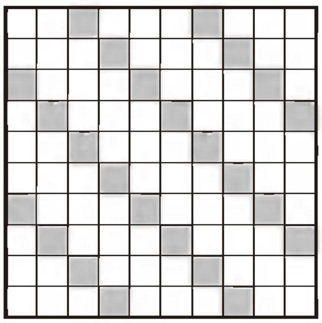


Рис. 1

2. Покажем, как за три взвешивания определить, равен ли общий вес двух фальшивых монет весу двух настоящих. Разделим монеты на 4 кучки по 6 монет. Первым взвешиванием сравним вес первой и второй кучек; вторым взвешиванием – вес третьей и четвертой кучек. Рассмотрим возможные результаты взвешиваний.

1) Весы оба раза оказались в равновесии. В этом случае две фальшивые монеты могут быть только в одной кучке, причем их суммарный вес равен весу двух настоящих монет.

2) Весы оказались в равновесии только один раз. Обозначим результаты взвешиваний так: $A = B$, $C < D$ (A, B, C, D – какие-то кучки). Тогда в A и B находятся настоящие монеты, в C и D – фальшивые. Третьим взвешиванием на одну чашу весов помещаем кучки $A + B$, а на другую $C + D$. Общий вес двух фальшивых монет будет равен весу двух настоящих только в том случае, если весы при третьем взвешивании окажутся в равновесии.

3) Весы ни разу не оказались в равновесии. Обозначим результаты взвешиваний так: $A < B$, $C < D$. Если легкая фальшивая монета находится в кучке A, то более тяжелая – в кучке D, если же легкая фальшивая монета находится в кучке C, то более тяжелая – в кучке B. Как бы то ни было, две фальшивые монеты одновременно находятся либо в $A + D$, либо в $B + C$. Третьим взвешиванием сравниваем $A + D$ с $B + C$. Общий вес двух фальшивых монет будет равен весу двух настоящих только в том случае, если весы при третьем взвешивании окажутся в равновесии.

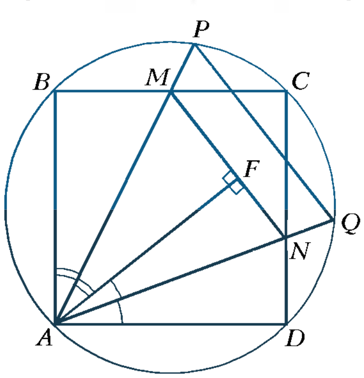


Рис. 2

3. Треугольник ABM отразим симметрично относительно гипотенузы AM, а треугольник ADN – относительно гипотенузы AN. Пусть при этом точка B перейдет в точку B', а точка D – в точку D'. Поскольку $\angle B'AM+\angle D'AN=45^\circ$, то точки B' и D' окажутся на одном луче с вершиной в точке A. Так как $AB=AB'=AD'=AD$, то точки B' и D' совпадают друг с другом – представляют одну и ту же точку. Введем для нее обозначение F (рис.2). Так как $\angle AFN=\angle AFM=90^\circ$, то три точки M, F и N лежат на одной прямой. Итак, ΔAMN представляет собой объединение треугольников ΔAMF и ΔANF. При этом $\angle BMA=\angle AMN$, $\angle DAQ=\angle FAQ=45^\circ-\angle FAM=45^\circ-\angle BAM$. Отсюда

$$\angle APQ=\frac{1}{2}\left(\overset{\smile}{AD}+\overset{\smile}{DQ}\right)=45^\circ+\angle DAQ=$$

$$=45^\circ+\left(45^\circ-\angle BAM\right)=90^\circ-\angle BAM=\angle BMA=\angle AMN.$$

Поскольку $\angle APQ=\angle AMN$, то $PQ\parallel MN$.

4. Возьмем произвольное число M. Ясно, что M – его самый большой делитель. Все остальные делители, очевидно, не превосходят $\frac{M}{2}$, поэтому общее количество делителей числа M не превышает $\frac{M}{2}+1$. Отсюда следуют неравенства

$$B\le\frac{A}{2}+1 \text{ и } \frac{A}{2}\le\frac{B}{2}+1, \text{ поэтому } \frac{A}{2}\le\frac{\frac{A}{2}+1}{2}+1=\frac{A}{4}+\frac{3}{2}, \text{ и}$$

$A\le 6$. Кроме того, из условия следует, что $\frac{A}{2}$ – целое число, поэтому A – четное число.

Четных чисел, не превышающих 6, всего три: 2, 4 и 6. Проверим каждое отдельно:

1) Пусть $A = 2$. Это число имеет 2 делителя, поэтому $B = 2$. Но у числа B тоже 2 делителя, а вовсе не $A/2 = 1$. Не подходит.

2) Пусть $A = 4$. Это число имеет 3 делителя, поэтому $B = 3$. У числа 3 имеется 2 делителя, что как раз равно $A/2$. Это подходит.

3) Пусть $A = 6$. Это число имеет 4 делителя, поэтому $B = 4$. У числа 4 имеется 3 делителя, что как раз равно $A/2$. Это тоже подходит.

Итак, получается, что есть две возможности: $A = 4$, $B = 3$, а также $A = 6$, $B = 4$. В первом случае сумма $A + 2B$ равна 10, во втором случае она равна 14. Но и у 10, и у 14 количество делителей одинаково и равно 4.

5. Расчертим квадрат на единичные клетки, как показано на рисунке 3. Каждый вырезанный круг полностью содержится в некотором квадрате 2×2. Назовем такой квадрат *регионом*. Докажем, что если из квадрата вырезать область, представляющую собой объединение пяти регионов, то из оставшейся части всегда можно вырезать два прямоугольника размером 1×2.

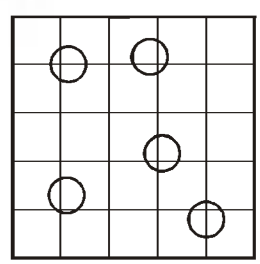


Рис. 3

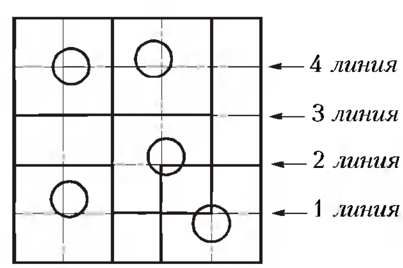


Рис. 4

Регион однозначно определяется положением его центра. Центр каждого региона находится на одной из четырех линий сетки (рис.4). Поскольку регионов пять, а линий, на которых лежат их центры, четыре, то либо 1-я и 2-я линии, либо 3-я и 4-я линии содержат не более двух центров регионов. Без ущерба для общности будем считать, что 1-я и 2-я линии содержат не более 2 центров регионов. Тогда возможны лишь 3 случая:

1) 1-я линия пустая (не содержит ни одного центра);

2) 2-я линия пустая;

3) 1-я и 2-я линии содержат ровно по одному центру.

В первом случае нижняя полоска (1×5) не пересекается ни с одним из пяти регионов (не имеет с ними ни одной общей клетки). Поэтому из нее можно вырезать два прямоугольника размером 1×2.

Для анализа второго случая закрасим в квадрате три «вертикальных» и четыре «горизонтальных» прямоугольника размером 1×2, как показано на рисунке 5. Поскольку 2-я линия пустая, то каждый из пяти регионов имеет общие клетки ровно с одним из семи закрашенных прямоугольников. Следовательно, по крайней мере два закрашенных прямоугольника обязательно останутся целыми.

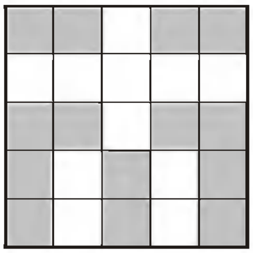


Рис. 5

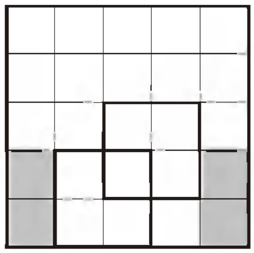


Рис. 6

Аналогично исследуется третий случай. Если регионы, центры которых находятся на 1-й и 2-й линиях, пересекаются, то из двух нижних полосок можно вырезать два «вертикальных» прямоугольника размером 1×2, как показано на рисунке 6. Если эти регионы не пересекаются, то можно вырезать «вертикальный» и «горизонтальный» прямоугольник размерами 1×2, как показано на рисунке 7.

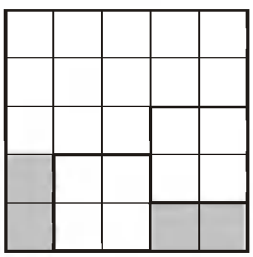


Рис. 7

Замечание. Как указал С.Волченков, более двух прямоугольников размером 1×2 из исходного квадрата вырезать невозможно.

Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. Да. Если, например, дуть ритмично, в такт собственным колебаниям груза.

2. Да. Надо раскачивать дверь с частотой, равной собственной частоте колебаний двери. При резонансе амплитуда колебаний может достичь больших значений.

3. Энергия колебаний увеличивается благодаря периодическому изменению параметров системы, а именно – расстояния от точки подвеса до положения центра тяжести человека и качелей, при котором человек совершает работу.

4. При малом затухании амплитуда колебаний в режиме резонанса, а значит, и запасаемая системой энергия будут больше. А для этого потребуется большее время.

5. Нет. С ростом амплитуды колебаний моста увеличиваются потери энергии за период. Когда они сравняются с приростом энергии при ударе, дальнейшая раскачка прекратится.

6. При указанной скорости период собственных колебаний ледового покрытия совпадал с периодом колебаний, вызванных идущими автомашинами. Для предотвращения риска нужно было двигаться с бóльшими или меньшими скоростями.

7. Капитану удалось вывести катер из резонансной раскачки.

8. Для маятников *1* и *4*, а также *2* и *5*, поскольку у этих пар маятников одинаковые длины подвесов, а значит, и одинаковые периоды колебаний.

9. Это завибрировали струны, имеющие ту же собственную частоту колебаний, что и у пропетых нот.

10. Для более богатого набора собственных частот инструмента. Тон при увеличении размеров понижается.

11. Подносимые предметы служат резонаторами, усиливающими слабые звуки.

12. Камертоны обладают очень малым затуханием, поэтому резонанс у них острый, так что даже небольшая разница между их частотами приводит к тому, что один не откликается на колебания другого.

13. При некотором положении сердечника наступает электрический резонанс.

14. Резонанс в цепи можно ожидать на частоте генератора, в n = 1, 2, 3... раз меньшей собственной частоты колебательного контура.

15. Когда контур настроен в резонанс с колебаниями в волне.

16. Прием разумными короткими антеннами дает более слабый сигнал, но затем он усиливается в приемнике.

Микроопыт

В шуме наливающейся воды будет выделяться тон определенной высоты, так как полость бутылки служит резонатором. По мере заполнения бутылки длина резонирующего воздушного столба уменьшается, и высота слышимого тона растет.

Однозначно ли определяется треугольник?

2. *Указание.* Воспользуйтесь формулой Герона.

3. Радиусы r_a, r_b, r_c вневписанных окружностей однозначно определяют треугольник для любых положительных чисел r_a, r_b, r_c. Для доказательства этого утверждения воспользуйтесь соотношениями

$$h_a=\frac{2r_br_c}{r_b+r_c},\quad h_b=\frac{2r_cr_a}{r_c+r_a},\quad h_c=\frac{2r_ar_b}{r_a+r_b}.$$

4. Соотношения (2) можно записать в эквивалентной форме

$$a:b:c=h_b:h_a:\frac{h_ah_b}{h_c},$$

откуда следует, что треугольник со сторонами h_b, h_a, $\frac{h_ah_b}{h_c}$ подобен треугольнику с соответственными сторонами a, b, c. Построив треугольник $A'B'C'$ такой, что $A'B'=\frac{h_ah_b}{h_c}$, $A'C'=h_b$, $C'A'=h_a$, опустим из вершины A' высоту $A'D'$. Отложив на луче $A'D'$ отрезок $A'D=h_a$, через точку D проведем прямую, параллельную $B'C'$. В пересечении с прямыми $A'B'$ и $A'C'$ получим точки B и C соответственно. Треугольник $A'BC$ – искомый.

5. Сначала перепишем равенства (7) в виде

$$\begin{aligned} a^2&=\frac{8}{9}m_b^2+\frac{8}{9}m_c^2-\frac{4}{9}m_a^2,\\ b^2&=\frac{8}{9}m_a^2+\frac{8}{9}m_c^2-\frac{4}{9}m_b^2,\\ c^2&=\frac{8}{9}m_b^2+\frac{8}{9}m_a^2-\frac{4}{9}m_c^2. \end{aligned}\qquad (*)$$

Далее заметим, что в силу неравенства $\frac{x^2+y^2}{2}\ge\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$, справедливого для любых положительных чисел x и y (докажите это), имеем $\frac{m_1^2+m_2^2}{2}\ge\left(\frac{m_1+m_2}{2}\right)^2$, где m_1, m_2 – любая пара из набора длин медиан $\{m_a, m_b, m_c\}$. Привлекая далее неравенства (6) статьи, убеждаемся в том, что в правой части равенств (*) стоят положительные числа. Следовательно, уравнения (*) однозначно решаются относительно положительных чисел a, b, c.

6. Пусть в искомом треугольнике ABC точка O – точка пересечения медиан. Продлим медиану BB_1 на отрезок B_1M, равный B_1O. Тогда $AOCM$ – параллелограмм, в котором $MC = AO = \frac{2}{3}m_a$, $MO = \frac{2}{3}m_b$, $CO = \frac{2}{3}m_c$. Строим треугольник MOC по трем сторонам. Проводим в нем медиану CB_1 и продолжаем ее на отрезок $B_1A = CB_1$; продолжаем сторону MO на отрезок $OB = MO$. Вершины A, B, C искомого треугольника построены.

7. *Указание*. Площадь треугольника равна $\frac{1}{2}pq\sin\varphi$, с другой стороны, она равна $\frac{1}{2}pl\sin\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{2}ql\sin\frac{\varphi}{2}$. Приравняв эти два выражения с учетом того, что $\sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$, получаем требуемый результат.

Комбинированные задачи по механике

1. $s = \pi v\sqrt{3m/k}$. **2.** $\tau = \frac{2v_0}{g}\sqrt{\frac{m}{M}+\frac{1}{\sin^2\alpha}}$.

3. $s = \left(\frac{9\pi^2}{4}+1\right)\frac{mg}{k}$. **4.** $N = mg$.

5. $v = c\frac{E_\gamma}{m_я c^2} = \frac{E_\gamma}{E} \approx 60$ м/с.

Московский государственный университет

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 2; 2/3. *Указание*. Пусть $t > 0$ – первая дробь, а $s > 0$ – вторая. Тогда $\frac{1}{t} = \frac{1}{s} - 1$, а $s = kt$, где $k = 3$ или $k = \frac{1}{3}$.

2. $\{0\}\cup[1/2;1]\cup\left[\left(3+\sqrt{5}\right)/2;+\infty\right)$. *Указание*. После замены $a = \sqrt{x}$, $b = \sqrt[3]{1-2x}$ неравенство примет вид $a+b \le$ $\le \sqrt[3]{a^3+b^3}$. Равносильное ему неравенство $ab(a+b) \le 0$ решается без труда.

3. 15. *Указание*. Треугольники ADB и MCB подобны, а $BM/AB = 5/3$.

4. $[-9/10;0)\cup(2;9/4)\cup(9/4;19/8)$. *Указание*. Пусть $t =$ $= \lg x$, $f = \lg(a+1)$, $g = \lg(19-8a)$. Исходное уравнение приводится к виду $\frac{t^2-2ft+fg}{ft} = 0$ и имеет два различных корня t_1 и t_2 тогда и только тогда, когда $f^2 - fg > 0$, $ft \ne 0$, т.е. при $a \in (-1;0)\cup(2;9/4)\cup(9/4;19/8)$. При этом корни исходного уравнения $x_1 = 10^{t_1}$ и $x_2 = 10^{t_2}$ положительны и различны, а условие $x_1x_2 \ge$ $\ge 0{,}01$ равносильно тому, что $(a+1)^2 \ge 0{,}01$.

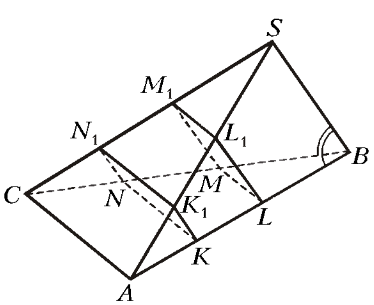


Рис. 8

5. 32/5. Сечением сферы плоскостью грани ABS (рис.8) является окружность, проходящая через точки K, L, K_1 и L_1, отрезки KL и K_1L_1 – равные хорды этой окружности, поэтому вписанный в окружность четырехугольник KLK_1L_1 является равнобокой трапецией. Из этого заключаем, что $AL = AL_1$ и $AK = AK_1$. Аналогично, $CN = CN_1$, $BL = BM$ и $SL_1 = SM_1$. Из доказанных равенств следует, что $CB + AS = AB + CS$. Наложим треугольник SBA на треугольник SBC так, чтобы отрезок SB остался общим, а луч BA наложился на луч BC (сделать это позволяет равенство углов $\angle SBA$ и $\angle SBC$). Точку, в которую при наложении попадет точка A, обозначим через A_1. Равенство $CB + A_1S = A_1B + CS$ приведет к равенству $CS = A_1S + CA_1$ в случае, если точка A_1 попадет между точек C и B, или к равенству $CS = A_1S - CA_1$ в случае, если точка C попадет между A_1 и B. Каждое из этих равенств противоречит неравенству треугольника, поэтому A_1 совпадает с C. Следовательно, $BC = BA$, $SA = CS$.

Итак, треугольники ABC и ASC равнобедренные. Плоскость, проходящая через точки B и S и середину ребра AC, содержит два перпендикуляра к AC и поэтому перпендикулярна AC. Следовательно, $SB \perp AC$.

Так как $BL = BM$, а треугольник ABC равнобедренный, то $LM \parallel AC$. Аналогично, $KN \parallel K_1N_1 \parallel L_1M_1 \parallel AC$. Поскольку $K_1N_1 \perp K_1K$ и $K_1N_1 \parallel AC$, то $AC \perp K_1K$. Если бы отрезки K_1K и SB не были параллельны, то ребро AC, будучи перпендикуляром к каждому из них, оказалось бы перпендикулярно плоскости ASB и, следовательно, ребру AB. Но это противоречит тому, что треугольник ABC равнобедренный. Поэтому $K_1K \parallel SB$. Отсюда и из равенства $AK = AK_1$ получаем, что треугольник SAB равнобедренный. Следовательно, равнобедренным является и треугольник SCB. Тогда $K_1K \parallel L_1L \parallel SB \parallel M_1M \parallel N_1N$.

Поэтому точки K, K_1, N_1, N, L, L_1, M_1 и M образуют два прямоугольника – KK_1N_1N и LL_1M_1M. Отсюда $L_1L = M_1M = 2K_1K$, и из подобия треугольников AK_1K и AL_1L получаем $AL = 2\,AK$, или $AK = KL$. Аналогично, условие $2KN = 3L_1M_1$ приводит к равенству $LB = 2KL$. Итак, $AK : KL : LB = 1 : 1 : 2$.

Отношение площади трапеции $KLMN$ к площади треугольника ABC равно 5 : 16 (треугольники LBM и KBN подобны с коэффициентом 2/3, поэтому площадь трапеции $KLMN$ составляет 5/9 площади треугольника KBN, а треугольники KBN и ABC подобны с коэффициентом 3/4 и их площади относятся как 9 : 16). Длина перпендикуляра, опущенного из точки M_1 на плоскость ABC, относится к высоте SH пирамиды $SABC$, как 1 : 2 (это следует из того, что $CM_1 : CS =$ $= AL : AB$). Поэтому отношение объемов пирамид $SABC$ и M_1KLMN равно 32 : 5.

6. 1; –1/3; –1/2; –3/4. *Указание*. Пусть $y = \frac{1-x}{1+x}$, тогда вторая дробь равна $z = -\frac{y^2+y-1}{2y^2-6y-1}$, и остается выяснить, при каких целых $y \ne -1$ будет целым число z. Заведомо не годятся значения y, при которых $\left|\frac{y^2+y-1}{2y^2-6y-1}\right| < 1$. Остальные целые значения y следует просто перебрать.

Вариант 2

1. $(0;2]$.

2. $\arccos\sqrt{2/3}$. Вторая и третья сферы касаются друг друга внешним образом, поэтому $AB = 2$. Обе сферы могут касаться первой сферы как внешним, так и внутренним образом. Невозможен случай, когда одно из этих касаний внешнее, а другое – внутреннее (тогда центры их лежали бы на одной прямой, из чего следовало бы, что точка O лежит в плоскости γ, а это противоречит условию задачи).

Возможны два случая. Первая сфера либо касается каждой из двух других внешним образом, либо касается каждой из них внутренним образом. В первом случае $OA = OB = \sqrt{6}+1$, а проекции $O'A$ и $O'B$ этих отрезков на плоскость γ равны (из теоремы Пифагора) $\sqrt{6+2\sqrt{6}}$. Из теоремы косинусов для треугольника $AO'B$ получаем

$$\cos\angle AO'B = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Во втором случае $OA = OB = \sqrt{6}-1$. Аналогично получаем $\cos\angle AO'B = -\sqrt{\frac{2}{3}}$.

В первом случае угол $AO'B$ острый, а во втором – тупой, при этом угол между прямыми $O'A$ и $O'B$ равен в обоих случаях $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$. Так как $\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{16}{24}} > \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$, получаем $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}} < \arccos\frac{4}{5}$.

3. 300/13 км. *Указание.* Пусть $AB = x$, а v_1 и v_2 – скорости велосипедиста в начале и в конце пути от A до C. Участок AB велосипедист прошел за время $\frac{x}{v_1}$, BC – за время $\frac{75-x}{v_2}$. Поскольку $v_1 < v_2$, а по условию $\frac{x}{75-x} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 < 1$, то $x < \frac{75}{2}$, т.е. последние 18 км велосипедист ехал со скоростью v_2. Кроме того, $x \geq 2$.

Если $x \geq 18$, получаем уравнение $\frac{x}{75-x} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$, а при $2 \leq x < 18$ – уравнение $\frac{x}{75-x} = \frac{x^2}{(9+x)^2}$.

4. 3. Из параллельности отрезков BX и CD получаем равенства $\angle DCX = \angle BXC$ и $\angle CDX = \angle BXA$, а из параллельности отрезков CX и BA – равенства $\angle BXC = \angle XBA$ и $\angle BAX = \angle CXD$. Из того, что четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, следует, что $\angle BAX + \angle DCX + \angle BCX = \angle BAX + \angle DCB = 180^\circ = \angle BAX + \angle ABX + \angle AXB$, откуда (пользуясь равенством $\angle ABX = \angle DCX$) заключаем, что $\angle BCX = \angle AXB$. Полученные равенства показывают, что треугольники ABX, BXC и XCD попарно подобны друг другу. Тогда $AX : BC = BX : XC$ и $BC : DX = BX : XC$, откуда $AX : BC = BC : DX$, или $BC^2 = AX \cdot DC = 9$, и $BC = 3$.

5. $(2; +\infty)$. *Указание.* Данное уравнение при любом a имеет 2 корня x_1 и x_2. Пусть $\alpha = \operatorname{arctg} x_1$, $\beta = \operatorname{arctg} x_2$. По условию задачи должно выполняться неравенство $\alpha + \beta > \frac{\pi}{4}$, что равносильно системе

$$\begin{cases} \alpha+\beta > 0, \\ \operatorname{ctg}(\alpha+\beta) < 1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x_1 + x_2 > 0, \\ \dfrac{1 - x_1x_2}{x_1 + x_2} < 1. \end{cases}$$

Осталось заметить, что $x_1 + x_2 = 2a - 1$, а $x_1x_2 = a - 4$, и решить полученную систему относительно a.

6. $\frac{1}{4}\left(3+\sqrt{8}-\sqrt{11}\right)$. Нахождение минимального значения выражения $(x+y-z)^2$ сводится к нахождению минимального значения выражения $|2(x+y-z)| = |3(x+y)-(y+z)-(z+x)|$, которое совпадает с одним из чисел $|\pm a \pm b \pm c|$, где $a = |3(x+y)|$, $b = |y+z|$ и $c = |z+x|$. Из условия задачи получаем

$$\begin{cases} 3 \leq a \leq \sqrt{12}, \\ \sqrt{8} \leq b \leq 3, \\ \sqrt{10} \leq c \leq \sqrt{11}. \end{cases} \qquad (*)$$

Так как каждое из чисел a, b и c больше 2, но меньше 4, справедливы неравенства $a + b - c > 0$, $b + c - a > 0$ и $c + a - b > 0$. Поэтому числа $|\pm a \pm b \pm c|$ совпадают с одним из чисел $a + b - c$, $b + c - a$, $c + a - b$ и $a + b + c$. Следовательно, число $|\pm a \pm b \pm c|$ не меньше меньшего из минимальных значений выражений $a + b - c$, $b + c - a$ и $c + a - b$ при условиях (*).

При выполнении условий (*) минимальное значение выражения $a + b - c$ равно $3+\sqrt{8}-\sqrt{11}$, минимальное значение выражения $b + c - a$ равно $\sqrt{8}+\sqrt{10}-\sqrt{12}$, минимальное значение выражения $c + a - b$ равно $\sqrt{10}+3-3=\sqrt{10}$. Заметив, что

$$3+\sqrt{8}-\sqrt{11} < \sqrt{8}+\sqrt{10}-\sqrt{12},$$

получаем, что число вида $|\pm a \pm b \pm c|$ не меньше чем $3+\sqrt{8}-\sqrt{11}$. Это значение достигается для решения системы

$$\begin{cases} 3x+3y = 3, \\ y+z = -\sqrt{8}, \\ z+x = \sqrt{11}. \end{cases}$$

Вариант 3

1. 7/2. *Указание.* Исходная система определяет прямоугольную трапецию с основаниями 5 и 2 и высотой 1.

2. $\left[-\frac{59}{2}; \frac{1}{2}\right] \cup \left(2; \frac{5}{2}\right)$.

3. 8. *Указание.* Докажите, что треугольник ABC равнобедренный, найдите отношение радиусов r и r_1 окружностей, а затем и сами радиусы, после чего найдите AB и примените теорему синусов для отыскания радиуса описанной окружности.

4. 1; –7/23. *Указание.* Уравнение равносильно системе $\sin|x| \geq 0$, $5\sin x + 3\cos x + \sqrt{2} = 0$. Кроме того, $\operatorname{tg}|x| = \sin|x|/\cos x$. Поэтому $\operatorname{tg}|x|$ имеет тот же знак, что и $\cos x$. Возможные значения $\operatorname{tg} x$ найдите из уравнения $23\operatorname{tg}^2 x + 30\operatorname{tg} x + 7 = 0$, полученного возведением в квадрат уравнения $5\sin x + 3\cos x = -\sqrt{2}$ и делением на $\cos^2 x$ ($\cos x \neq 0$). После этого найдите и возможные значения $\operatorname{tg}|x|$.

5. $\left[-\sqrt{2}; -1\right) \cup \left(1; \sqrt{2}\right]$. *Указание.* Пусть $t = 3^{|ax|}$. Из неравенства системы следует, что $|ax| \leq 2$, а из уравнения – что $\sqrt{a^2-x^2} = \frac{n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$, $n \geq 0$. Выполнив замену $y = x^2$, $b = a^2 \geq 0$, получим систему

$$\begin{cases} by \leq 4, \\ b - y = \dfrac{n^2}{4}. \end{cases}$$

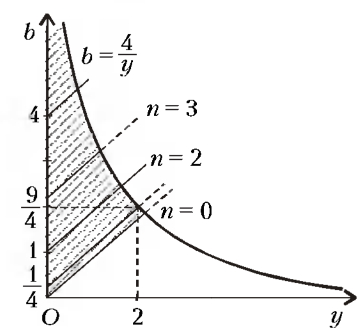


Рис. 9

Решения системы на плоскости Oyb (рис. 9) представляются семейством отрезков прямых $b = y + \frac{n^2}{4}$, n = 0, 1, 2, ..., находящихся в заштрихованной области между осью Ob и ветвью гиперболы $b = \frac{4}{y}$. Максимальное количество положительных решений y соответствует значениям b из промежутка $(1; 2]$.

6. 1. *Указание.* Две противоположные грани параллелепипеда – ромбы (рис.10). Пусть r – радиус вписанного шара, $h = 2r$ – его высота. Запишем объем параллелепипеда тремя способами:

$$V = a^2h\sin\alpha = abh\sin\beta = abh\sin\gamma.$$

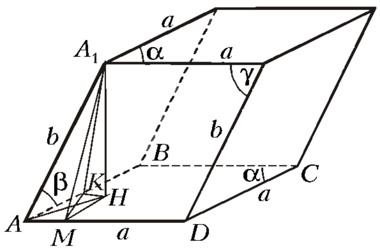


Рис. 10

Откуда

$$\sin\beta = \sin\gamma = \frac{a}{b}\sin\alpha .$$

Для высоты $h = A_1H$ параллелепипеда получим по теореме Пифагора $h = \sqrt{A_1A^2 - AH^2}$. Чтобы вычислить AH, примените теорему синусов к треугольнику KAM: $AH = KM/\sin\alpha$. Отрезок KM найдите по теореме косинусов из треугольника KAM:

$$KM = b\sqrt{2}\,|\cos\beta|\sqrt{1-\cos\alpha} .$$

Окончательно, после упрощений получим

$$h = b\sqrt{1 - \frac{2\cos^2\beta(1-\cos\alpha)}{\sin^2\alpha}} .$$

Преобразуем функцию

$$f = \frac{2\cos^2\beta(1-\cos\alpha)}{\sin^2\alpha}$$

к виду

$$f = \left(\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}} - \frac{2a}{b}\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \frac{4a}{b} - \frac{4a^2}{b^2} .$$

Ясно, что $f \ge \frac{4a}{b}\left(1 - \frac{a}{b}\right)$, причем равенство достигается лишь при $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{b}{2a}$. При $a = 4$ и $b = 3$ это возможно. Осталось вычислить $r = \frac{h}{2}$.

Вариант 4

1. $-\sqrt{2}$.

2. $[-1; -7/8]\cup\{1\}$. *Указание.* Приведите неравенство к виду $\sqrt{1-x}\left(2\sqrt{1+x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \le 0$.

3. $\arccos\frac{29}{7\sqrt{19}}$. *Указание.* Введите в пространстве прямоугольную систему координат, направив оси Ox, Oy и Oz по ребрам AD, AB, AA_1 , запишите координаты векторов $\overrightarrow{AC_1}$ и $\overrightarrow{KL}$, после чего воспользуйтесь формулой для скалярного произведения $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\widehat{\vec{a}\vec{b}}$.

4. 10 ч 40 мин того же дня.

5. $\left(\pm\arccos\frac{1}{5} + 2\pi k; (-1)^n\arcsin\frac{4}{5} + \pi n\right)$, $k, n \in \mathbf{Z}$. *Указание.* После замены $a = \sqrt{13\cos x + 98\sin y}$, $b = \sqrt{13\cos x + 28\sin y}$ система приобретает вид

$$\begin{cases} a - b = 4, \\ 2b - \sqrt{a^2 - b^2 + 8} = 2 \end{cases}$$

и легко решается: $a = 9$, $b = 5$, после чего без труда находятся $\cos x$ и $\sin y$.

6. $7\sqrt{3}$. Обозначим стороны данного треугольника, лежащие против вершин A, B и C, через a, b и c соответственно (рис 11). Из условия задачи следует $c > b$. Пусть $\angle BAD = \angle CAD = \alpha$, $\angle ADC = \beta$. Тогда $\angle B = \beta - \alpha$. Так как $c > b$, то $\beta < \pi/2$. Пусть окружность радиуса r, центр O которой лежит на прямой BC, проходит через точки A, D. Точка O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AD, следовательно, на луче DC. Поскольку треугольник OAD – равнобедренный, то $\angle DAO = \beta$. Из вышесказанного следует $\beta > \alpha$, поэтому точка C лежит на прямой BC между точками D и O. Тогда $\angle CAO = \beta - \alpha$, следовательно, треугольник ABO подобен треугольнику CAO. Значит,

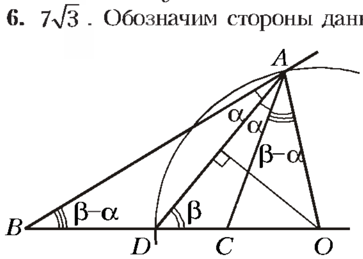


Рис. 11

$$\frac{r + BD}{r} = \frac{r}{r - CD} . \qquad (*)$$

Далее, по свойству биссектрисы треугольника ABC имеем

$$BD = \frac{ac}{b+c} , \quad CD = \frac{ab}{b+c} .$$

Подставляя эти выражения для BD и CD в $(*)$, получаем

$$\left(r + \frac{ac}{b+c}\right)\left(r - \frac{ab}{b+c}\right) = r^2 \Leftrightarrow r\left(c^2 - b^2\right) = abc .$$

Применяя формулу $R = \frac{abc}{4S}$, где S – площадь треугольника ABC, а R – радиус описанной окружности, находим $R = \frac{r\left(c^2 - b^2\right)}{4S}$. Теперь, используя данные из условий задачи, получаем ответ: $R = 7\sqrt{3}$.

Вариант 5

1. 3. **2.** $\pi(4n \pm 1)/4$, $n \in \mathbf{Z}$. **3.** -9, $\left(-1 + \sqrt{33}\right)/2$.
4. $\sqrt{7}$. **5.** (1; 27). **6.** 4/9.

7. $(a+1; 0)\cup(-a-3; +\infty)$ при $a \le -3$; $(a+1; 0)\cup(0; +\infty)$ при $-3 < a < -2$; $(0; +\infty)$ при $a = -2$; $(-a-3; a+1)\cup(0; +\infty)$ при $-2 < a < -1$; $(-a-3; 0)\cup(a+1; +\infty)$ при $a \ge -1$.
Указание. Поскольку знак выражения $\sin x + 2x$ совпадает со знаком x, неравенство равносильно такому:

$$x(x - a - 1)(x + a + 3) > 0 .$$

Осталось рассмотреть все возможные случаи расположения точек 0, $a + 1$ и $-a - 3$ на числовой оси и применить в каждом из случаев метод интервалов.

8. 2/3; $4\sqrt{15}/15$.

Вариант 6

1. $\pi(2n+1)/10$, $(-1)^n\pi/15 + \pi n/5$, $n \in \mathbf{Z}$.

2. $(-\infty; 1)\cup(3/2; 2]$. **3.** $\left(0; \log_{3/4}(1/4)\right)$. **4.** 9/2.

5. 4, 8, 16; 16, 8, 4. **6.** $3\sqrt{6}/4$.

7. 1) $x \in \mathbf{R}$ при $-3 < a < -2$;

$$\left(-\infty; 3 - \sqrt{a^2 + 5a + 6}\right)\cup\left(3 + \sqrt{a^2 + 5a + 6}; +\infty\right)$$

при $a \le -3$ и $a > -2$.

2) $\frac{-5-\sqrt{13}}{2} < a \le -3$; $-2 \le a < \frac{-5+\sqrt{13}}{2}$.

8. 6.

Вариант 7

1. 1/4; 1/2. **2.** (1; 1). **3.** $(-4; -3{,}9]\cup\left(4; \sqrt{17}\right)$.

4. $\frac{2\pi n}{7}$, $\frac{2\pi m}{9}$, $n \ne 7l$, $m \ne 9l$, $n, m, l \in \mathbf{Z}$. *Указание.* Уравнение преобразуется к виду

$$64\cos^2\frac{x}{2}\cos^2 x\cos^2 2x = 1 .$$

После умножения левой и правой частей на $\sin^2\frac{x}{2}$ (при $\sin^2\frac{x}{2} \ne 0$) это уравнение приводится к виду

$$\sin^2 4x = \sin^2\frac{x}{2} , \text{ или } \cos 8x = \cos x .$$

5. 8. *Указание.* Точка M лежит на меньшей из дуг AB, так

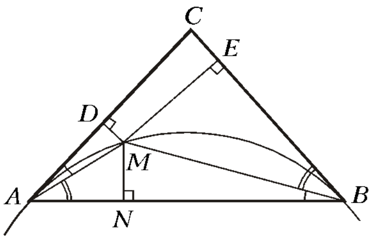


Рис. 12

как проектируется на стороны AC и BC (рис.12). Из подобия прямоугольных треугольников AMD и BNM ($\angle A = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AM} = \angle B$), а также ANM и BEM ($\angle A = \frac{1}{2}\overset{\smile}{BM} = \angle B$) имеем

$$\frac{MD}{MN} = \frac{AM}{BM} = \frac{MN}{ME}, \text{ откуда } ME = \frac{MN^2}{MD} = \frac{4^2}{2} = 8 .$$

Далее находим угол M треугольника MNE:

$$\angle M = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \frac{1}{2}\left(180^\circ - \angle C\right) = 150^\circ$$

и искомую площадь.

6. 0; $\frac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{5}\right)$. *Указание.* Положим $t = x - 1$, $b = a^3 - 3a^2 + a$ и приведем уравнение к виду $f(t) = b$. Так как функция f четная, то если уравнение имеет единственный корень t_0, то $t_0 = 0$. Отсюда

$$b = f(0) = 0.$$

Если $t \neq 0$, то $f(t) < f(0)$, так что при $b = 0$ уравнение действительно имеет ровно один корень.

Вариант 8

1. $(-\infty; 1/3)$. **2.** $\pi(2n+1)/10$, $n \in \mathbf{Z}$. **3.** $15\sqrt{15}/32$.
4. $(-\infty; -2] \cup [-1; 0) \cup (0; 1] \cup [2; +\infty)$. *Указание.* Положив $t = 2|x|$, $y = 2\log_2 t$, разложите левую часть на множители:

$$(y-2)(y+t-3) \geq 0.$$

Далее воспользуйтесь тем, что полученное неравенство равносильно неравенству

$$(t-4)(t-2) \geq 0$$

(докажите это!).

5. а) $2+\sqrt{2}$; б) $\left(-\infty; 2-\sqrt{2}\right) \cup \{1\} \cup \left(2+\sqrt{2}; +\infty\right)$. *Указание.* Пусть

$$y = f(x) = x^2 + 2(a-2)x + a^2 - 4a = (x+a)(x+a-4),$$

$$g(y) = y^2 + (a+5)y - a^2 + 8a + 2.$$

Функция $y = f(x)$ принимает в точке $x_b = 2 - a$ минимальное значение $f(2-a) = -4$, а остальные свои значения (большие, чем -4) – по 2 раза. Поэтому исходное уравнение имеет единственный корень тогда и только тогда, когда $g(-4) = 0$, а $y_b = -\frac{a+5}{2} \leq -4$. Два корня исходное уравнение может иметь лишь в двух случаях: если оба корня y_1 и y_2 уравнения $g(y) = 0$ удовлетворяют условию $y_1 < -4 < y_2$, т.е. при $g(-4) = 0$; если $y_1 = y_2 > -4$.

Вариант 9

1. $(3/7; 1)$. **2.** $-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

3. 70. *Указание.* Воспользуйтесь формулой

$$(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$$

при $u = \sqrt[3]{20}$, $v = \sqrt[3]{50}$.

4. $(1; 64)$. **5.** $-11\pi/12$, $-7\pi/12$.

6. $c \Big/ \left(2 + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right)$.

7. $(1/15; 1/8) \cup (1/8; 4/15] \cup \{1/2\} \cup [1; 4)$.

Вариант 10

1. $(-\infty; 1/3] \cup (2; +\infty)$. **2.** $(1; 1/2)$. **3.** $(-\infty; -2] \cup (2; +\infty)$.

4. 2. **5.** $-\pi/2$; $\pi/2$; $5\pi/6$.

6. $\frac{9}{4}\sqrt{15}$.

7. $(-\infty; 1)$. *Указание.* Первое из неравенств системы задает часть полосы $-1 \leq x \leq 1$, ограниченную сверху полуокружностью $y = \sqrt{1-x^2}$.

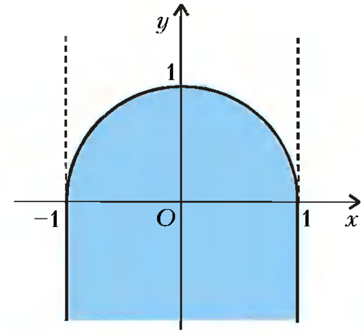


Рис. 13

Если $a \leq 0$, то второму неравенству данной системы удовлетворяют координаты любой точки плоскости. Следовательно, искомая плоская фигура – выделенное множество на рисунке 13. Эта фигура является неограниченной, ее периметр бесконечен, значит, любое $a \leq 0$ является решением задачи.

Пусть $a > 0$. Заметим, что множество точек координатной плоскости, определяемое неравенством $|y| \leq \frac{1}{a}|x|$, симметрично относительно обеих координатных осей. Таким образом, искомая фигура – выделенное множество на рисунке 14.

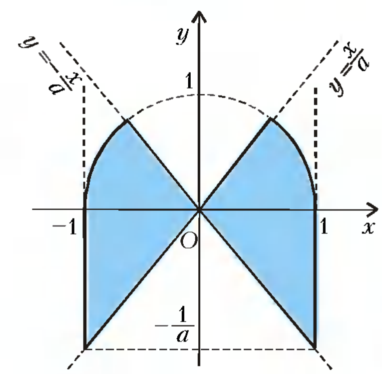


Рис. 14

Вычисляя периметр этой фигуры, получим

$$P(a) = 2 + \frac{2}{a} + 2\sqrt{1 + \frac{1}{a^2}} + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{a}.$$

Остается решить неравенство

$$P(a) > P(1).$$

Для этого заметим, что функция $P(a)$ при $a > 0$ убывающая, т.е. решения неравенства образуют интервал $0 < a < 1$.

8. $\frac{31}{288}\sqrt{113}$. *Указание.* Сечением является пятиугольник, показанный на рисунке 15. В этом пятиугольнике

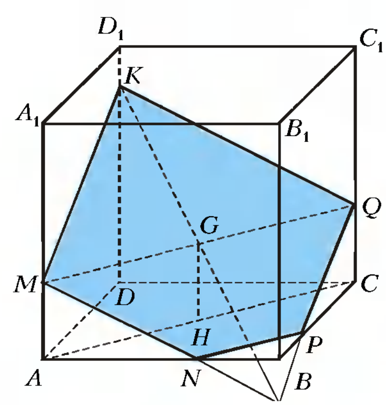


Рис. 15

$NP \parallel MQ \parallel AC$, $GH = MA = 1/3$, $MK \parallel QP$, $MN \parallel KQ$.
Площадь пятиугольника равна сумме площадей равнобедренного треугольника MKQ и трапеции $MNPQ$.

Вариант 11

1. 3. **2.** $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

3. $(-3; 9)$, $(2; 4)$. *Указание.* Из условия задачи следует, что корни x_1 и x_2 данного уравнения удовлетворяют системе $x_1^2 = px_2$, $x_2^2 = qx_1$, $x_1 + x_2 = 6p$, $x_1x_2 = q$.

4. а) 10π; б) 160. *Указание.* На числовой оси AB с началом в точке A окрашенные точки образуют 2 серии – это точки вида $x = 30\pi n$ и $x = 40\pi k$, $n,k \in \mathbf{N}$. Подсчитайте количество точек первой и второй серий, принадлежащих AB, и вычтите из суммы этих количеств число точек, принадлежащих пересечению двух упомянутых серий.

5. а) 3; б) $\frac{\pi}{3} \pm \arccos\frac{5}{6}$. *Указание.* Из подобия треугольников PQR и QTR следует, что $QT = \sqrt{PR \cdot TR}$ и что описанная около треугольника PQT окружность касается в точке Q прямой RQ. При вычислении угла QRP учтите, что RQ и RP могут находиться как по одну сторону от прямой OR, так и по разные стороны от нее.

6. $(0;0)$, $(\pm 2;\mp 2)$, $(\pm\sqrt{6};\pm\sqrt{6})$, $\left(\frac{(\pm\sqrt{3})+(\pm\sqrt{7})}{2};\frac{(\pm\sqrt{3})-(\pm\sqrt{7})}{2}\right)$ – всего 9 решений. *Указание.* Сложив и вычтя уравнения системы, получим систему

$$\begin{cases}(x+y)\left(x^2-xy+y^2-6\right)=0,\\(x-y)\left(x^2+xy+y^2-4\right)=0,\end{cases}$$

равносильную совокупности из четырех систем

$$\begin{cases}x-y=0,\\x+y=0;\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=0,\\x^2+xy+y^2=4;\end{cases}\quad\begin{cases}x^2-xy+y^2=6,\\x-y=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2-xy+y^2=6,\\x^2+xy+y^2=4.\end{cases}$$

Последняя из четырех равносильна системе

$$\begin{cases}x^2+y^2=5,\\2xy=-2.\end{cases}$$

Вариант 12

1. $(0;1)\cup(\pi/2;2]$. **2.** $9\left(3+\sqrt{3}\right)$.

3. $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $n,k\in\mathbf{Z}$.

4. $(-1;\ 0)$.

5. а) $232+288\sqrt{2}$; б) $\frac{144\pi\left(5\sqrt{2}+7\right)}{7}$. *Указание.* Докажите, что радиусы шаров образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$.

6. 2. *Указание.* Словарный запас людоеда составит через полгода $300(1+p/100)$, а через год $300(1+p/100)^2$ слов. Месячный прирост словарного запаса Эллочки $150(1+p/100)$ слов. Из того что все эти числа должны быть целыми, следует, что $p=10k$, где k – натуральное число. Мы должны найти такое n, при котором неравенство

$$300(1+p/100)^2 > 30+150n(1+p/100)$$

выполняется для всех $p=10k$, $k\in\mathbf{N}$. После преобразований получим

$$n<\frac{k^2+20k+90}{5k+50}=\frac{k}{5}+2-\frac{2}{k+10}\le 2\frac{1}{55}$$

(функция, стоящая справа, – возрастающая). Итак, $n\le 2$.

Вариант 13

1. Утверждение справедливо. **2.** $\left[-\frac{1}{2};0\right]\cup\left[\frac{7}{3};\frac{5}{2}\right)$.

3. $(-2;\ 3)$, $(-3;\ 2)$, $(-1;\ 5)$ $(-5;\ 1)$. *Указание.* Выполните замену $u=x-y$, $v=xy$.

4. 20 рабочих, 6 часов.

5. $\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $\frac{5\pi}{6}+2\pi l$, $\frac{\pi}{18}+2\pi m$, $\frac{17\pi}{18}+2\pi n$, $k,l,m,n\in\mathbf{Z}$.

Указание. Приведите уравнение к виду

$$(\log_2\sin 3x+1)(\log_2\cos 2x+1)=0.$$

6. $\sqrt{3/2}$. Пусть $f(x)$ и $g(y)$ – левая и правая части данного неравенства соответственно. Перепишем его в краткой форме:

$$f(x)\ge g(y). \qquad (1)$$

Пусть $u=x^2-6ax+10a^2$, тогда левая часть неравенства принимает вид

$$\varphi(u)=\sqrt[4]{u}+\sqrt[4]{3-u}.$$

Так как при $u\in[0;3]$ справедливо равенство $\varphi(u)=\varphi(3-u)$, то наряду с решением $(u;y)$ неравенство

$$\varphi(u)\ge g(y) \qquad (2)$$

имеет решение $(3-u;y)$. Поэтому необходимым условием единственности решения (2) является требование $u=3-u$, или $u=3/2$.

В свою очередь, уравнение

$$u=3/2 \Leftrightarrow x^2-6ax+10a^2-\frac{3}{2}=0,$$

определяющее зависимость x от данного u, имеет единственное решение при условии, что дискриминант квадратного трехчлена

$$D=-4a^2+6=0\text{, т.е. } a=\pm\sqrt{3/2}.$$

Таким образом, получены необходимые условия единственности решения неравенства (1).

Для исследования достаточности покажем сначала, что

$$\varphi(u)\le\varphi(3/2)=\sqrt[4]{24}\ \text{ для }\ u\in[0;3]. \qquad (3)$$

Обозначим $p=\sqrt[4]{u}\ge 0$, $q=\sqrt[4]{3-u}\ge 0$. При этом $p^4+q^4=3$. Требуется найти максимальное значение суммы $p+q$.

С помощью неравенств $2p^2q^2\le p^4+q^4$, $2pq\le p^2+q^2$ оценим

$$(p+q)^4=p^4+q^4+6p^2q^2+4pq\left(p^2+q^2\right)\le$$

$$\le 4\left(p^4+q^4\right)+2\left(p^2+q^2\right)^2\le 6\left(p^4+q^4\right)+4p^2q^2\le 8\left(p^4+q^4\right)=24.$$

Тогда $p+q\le\sqrt[4]{24}$, причем равенство достигается при $p=q=\sqrt[4]{3/2}$. Отсюда следует искомое неравенство (3).

Рассмотрим теперь каждое из найденных значений a.

При $a=-\sqrt{3/2}$ правая часть исходного неравенства принимает вид

$$g(y)=\sqrt[4]{24-\frac{6}{\sqrt{2}}+\left|y-\frac{3}{\sqrt{2}}\right|+\left|y+\frac{3}{\sqrt{2}}\right|}\ge\sqrt[4]{24},$$

поскольку, как нетрудно убедиться,

$$\left|y-\frac{3}{\sqrt{2}}\right|+\left|y+\frac{3}{\sqrt{2}}\right|\ge\frac{6}{\sqrt{2}},$$

причем

$$\left|y-\frac{3}{\sqrt{2}}\right|+\left|y+\frac{3}{\sqrt{2}}\right|=\frac{6}{\sqrt{2}}$$

при $y\in\left[-\frac{3}{\sqrt{2}};\frac{3}{\sqrt{2}}\right]$.

Так как для всех $y\in\left[-\frac{3}{\sqrt{2}};\frac{3}{\sqrt{2}}\right]$ правая часть (2) принимает значение $g(y)=\sqrt[4]{24}$, то неравенство $\varphi(u)\ge g(y)$ (а с ним и неравенство (1)) имеет более одного решения.

При $a=\sqrt{3/2}$ выражение $g(y)$ записывается в виде

$$g(y)=\sqrt[4]{24+2\left|y-\frac{3}{\sqrt{2}}\right|}\ge\sqrt[4]{24},$$

причем $g(y)=\sqrt[4]{24}$ только для $y=\frac{3}{\sqrt{2}}$. В этом случае нера-

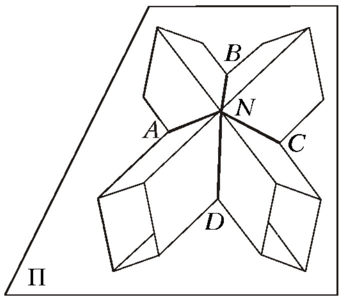


Рис. 16

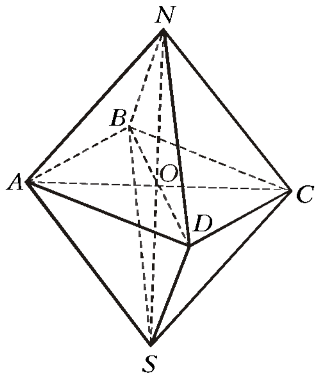


Рис. 17

венство (2) имеет единственное решение. В силу однозначности выражения x через u при указанном значении параметра a у неравенства (1) решение также единственно.

7. $\frac{2}{3}\left(2-\sqrt{3}\right)$.

Для того чтобы понять, объем какого тела требуется вычислить в задаче, сначала представим себе фигуру, которая получается при пересечении двух равных призматических поверхностей (перпендикулярные сечения которых суть квадраты со стороной 1), положенных на плоскость Π в виде косого креста – так, как показано на рисунке 16. Эта фигура образована двумя равными четырехугольными пирамидами с общим основанием $ABCD$, все боковые грани которых наклонены к нему под углом $45°$, отрезок NS перпендикулярен плоскости Π, а четырехугольник $ABCD$ – ромб, лежащий в плоскости, параллельной плоскости Π (рис.17). Острый угол этого ромба равен углу между ребром куба и его диагональю:

$$\angle ABC = 2\alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Стороны ромба равны длине этой диагонали: $\sqrt{3}$.

Общей частью двух кубов является лишь часть тела, которое составлено из двух равных четырехугольных пирамид с общим основанием $BEFG$ (рис. 18, где изображено сечение общей конструкции плоскостью, параллельной плоскости Π, и рис.19, где изображено искомое тело). Это следует из того, что длина отрезка BF меньше длины отрезка BO:

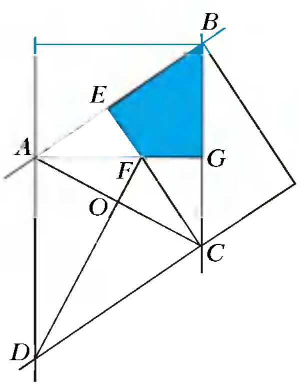


Рис. 18

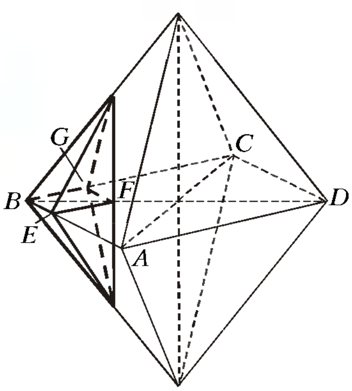


Рис. 19

$$BF = \frac{1}{\cos\alpha} < BO = \sqrt{3}\cos\alpha,$$

так как

$$\cos^2\alpha = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Поскольку катеты прямоугольного треугольника BEF равны $BE = 1$ и $EF = 1\cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$ соответственно, а высота интересующей нас пирамиды равна EF, то искомый объем равен

$$V = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{3}\left(2-\sqrt{3}\right).$$

Вариант 14

1. $\left[-1;\left(5+\sqrt{13}\right)/2\right)$. **2.** $(11;+\infty)$.

3. 0. **4.** 1.

5. $2\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$. *Указание.* Уравнение приводится к виду

$$(\cos 5x-2)(2\cos x-3)=1,$$

откуда

$$2-\cos 5x = 1,\quad 3-2\cos x = 1.$$

6. 2. *Указание.* Пусть a и $-b$ – выражения, стоящие под знаком модуля. Уравнение переписывается так:

$$|a|+|-b|-a-b+c^2=0,\ \text{где}\ c=x-2,$$

или

$$(|a|-a)+(|b|-b)+c^2=0,$$

откуда

$$|a|=a,\ |b|=b,\ c=0.$$

Вариант 15

1. 2. **2.** $(2;5/2)\cup(5/2;3)$. **3.** $60°$.

4. 15 кг. **5.** $2R^2\cos\alpha\left(\sqrt{2}\sin\alpha+\sqrt{1+\sin^2\alpha}\right)$; 54.

6. –1; –5/7; –3. *Указание.* При $a=-1$ условие выполнено. При $a\neq -1$ произведение корней, т.е. $x_1x_2=\frac{a+3}{a+1}=1+\frac{2}{a+1}$ должно быть целым. Также должно быть целым число

$$x_1+x_2=\frac{a-1}{a+1}=1-\frac{2}{a+1}.$$

Откуда

$$x_1+x_2+x_1x_2=2,$$

или

$$(x_1+1)(x_2+1)=3.$$

Вариант 16

1. $(-\infty;1)\cup[2;+\infty)$. **2.** $\pi n/3$, $n\in\mathbf{Z}$. **3.** $(-\infty;-1]\cup\{2\}$.

4. $\left(-\frac{15}{16};\frac{1}{\sqrt[4]{2}}-1\right)\cup\left(\sqrt[4]{2}-1;15\right)$. *Указание.* Выполните замену $t=\log_2(x+1)$, а затем решите полученное неравенство относительно $|t|$.

5. $\sqrt{190}/2$.

6. $\left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{6};\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}\right)$; первое число больше. *Указание.* Выполните замену переменной $u=\arcsin 2y$, $v=\arccos 3x$, воспользуйтесь равенством $\arccos a+\arcsin a=\pi/2$.

7. $\left[-6;1-\sqrt{13}\right]\cup\left[\sqrt{13}-1;6\right]$. Если $(x;y)$ – решение неравенства данной системы, то $(x;-y)$, $(-x;y)$, $(-x;-y)$ также его решения. Таким образом, множество M точек плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют неравенству, симметрично относительно обеих осей Ox и Oy.

Пусть $x\geq 0$, $y\geq 0$. Тогда исходное неравенство превращается в неравенство

$$x^2+y^2-6x-6y+17\leq 0 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y-3)^2\leq 1,$$

которое задает круг единичного радиуса с центром в точке $(3;3)$.

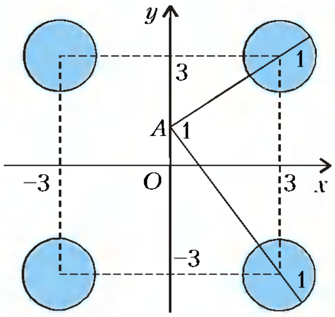


Рис. 20

Все множество M, состоящее из четырех кругов, изображено на рисунке 20. Равенство системы, которое можно переписать в виде

$$x^2 + (y-1)^2 = a^2,$$

является уравнением окружности с центром в точке $A = (0; 1)$ и радиусом, равным $|a|$.

Расстояние r_1 от точки A до точек ближнего к ней круга (например, находящегося в первой четверти), принимает значения

$$\sqrt{3^2+2^2} - 1 = \sqrt{13} - 1 \le r_1 \le \sqrt{3^2+2^2} + 1 = \sqrt{13} + 1,$$

а расстояние r_2 от точки A до точек дальнего круга (например, с центром в $(3; -3)$) изменяется в пределах

$$\sqrt{3^2+4^2} - 1 = 4 \le r_2 \le \sqrt{3^2+4^2} + 1 = 6.$$

У системы решения существуют тогда и только тогда, когда окружность имеет непустое пересечение с множеством M. Таким образом, поскольку $\sqrt{13} - 1 < 4 < \sqrt{13} + 1 < 6$, то необходимым и достаточным условием разрешимости системы является требование

$$\sqrt{13} - 1 \le |a| \le 6.$$

Вариант 17

1. 9 км/ч. **2.** 5/2.

3. $\left(-\infty; -\sqrt{17}\right) \cup [-4; -3) \cup (-3; 3) \cup \left(\sqrt{17}; 5\right]$.

4. 9. **5.** 5 ч и 7 ч 30 мин.

6. –4; 4; 6. *Указание.* Если $(x_0; y_0)$ – решение системы, то $(x_0; -y_0)$ – тоже решение. Необходимым условием для нечетности числа решений является существование решения, для которого $y_0 = -y_0$, т.е. $y_0 = 0$. Осталось подставить $y = 0$ в систему и выяснить, при каких a количество решений равно трем. Возможные значения a находим из системы

$$\begin{cases} (3x-3)(x-9) = 0, \\ (x-a)^2 = 25. \end{cases}$$

Это: –4, 4, 6, 14.

Теперь перепишем исходную систему:

$$\begin{cases} (3x + |y| - 3)(x + 3|y| - 9) = 0, \\ (x-a)^2 + y^2 = 25, \\ x \ge 0. \end{cases}$$

Множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют первому уравнению, – это четырехугольник $ABCD$, показанный на рисунке 21. Второе уравнение – окружности с центром в точке $(a; 0)$ и радиусом 5.

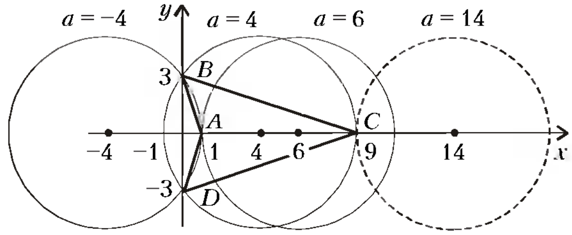


Рис. 21

7. (8, 0, 1, 0, 1). Описание процедуры дележа начнем со случая, когда число участвующих в нем равно двум. В этом случае старший пират забирает все золото – половина (он сам) поддерживает его предложение. Таким образом, итог дележа (10, 0).

В случае, если число пиратов равно трем, старший пират предлагает дележ, дающий 9 слитков ему и 1 слиток младшему (младший, понимая, что если он поддержит среднего пирата, то в итоге не получит ничего, вынужден с этим предложением согласиться). Тем самым, итог дележа (9, 0, 1). В случае, если число пиратов равно четырем, старший пират рассуждает так: «Если мое предложение будет отвергнуто, то три оставшихся пирата разделят золотые слитки по правилу (9, 0, 1); следовательно, я должен предложить такой дележ, который был бы выгоднее хотя бы одному из них, а мне давал бы наибольшую возможную долю». Единственное решение этой задачи – дележ (9, 0, 1, 0), в котором старший пират жертвует лишь одним слитком (в пользу пирата, третьего по старшинству).

Рассуждая подобным образом в случае пяти пиратов, в итоге получаем ответ: (8, 0, 1, 0, 1).

ФИЗИКА

Физический факультет

1. По условию задачи при движении точки A нити катушка катится без проскальзывания, сохраняя ориентацию своей оси. Следовательно, считая, как это обычно и делается в подобных задачах, катушку твердым телом, ее движение можно представить как сумму поступательного движения со скоростью u и вращения с некоторой угловой скоростью ω вокруг оси катушки. Катушка катится без проскальзывания, поэтому геометрическое место точек касания катушкой плоскости (считаем, конечно, плоскость абсолютно твердой) является мгновенной осью вращения, а величина угловой скорости вращения катушки равна

$$\omega = u/R.$$

Участок нити между точкой B ее касания средней части катушки и точкой A (рис.22) можно считать прямолинейным и утверждать, что сила натяжения нити в момент начала движения катушки должна образовывать с горизонтом тот же угол, что и касательная к нити в точке A. Поскольку иное специально не оговорено в условии задачи, будем считать указанный отрезок нити целиком расположенным в вертикальной плоскости, перпендикулярной оси катушки. Тогда, как это видно из рисунка, момент силы натяжения нити должен заставить катушку вращаться по часовой стрелке. Следовательно, учитывая нерастяжимость нити, можно утверждать, что

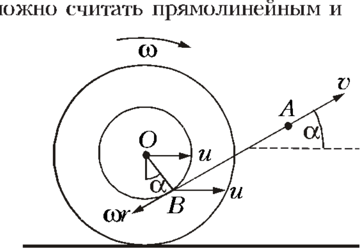


Рис. 22

$$v = u\cos\alpha - \omega r.$$

Отсюда находим искомую скорость движения оси катушки:

$$u = \frac{v}{\cos\alpha - 1/n} = \frac{2v}{\sqrt{3} - 1}.$$

2. Будем решать задачу при следующих стандартных предположениях: действием воздуха на тела системы можно пренебречь, а лабораторную систему отсчета, относительно которой оси колес неподвижны, можно считать инерциальной. Поскольку нить является шероховатой, при движении груза она не скользит по ободам колес. Из условия задачи следует, что в течение интересующего нас промежутка времени груз после отпускания движется поступательно вертикально вниз. Поэтому, учитывая, что ободы тонкие, нить нерастяжимая и тонкая, можно утверждать, что величины линейных скоростей точек ободов колес, груза и точек нити в указанные моменты времени должны быть одинаковыми.

Для решения задачи используем закон сохранения механической энергии. Действительно, в рамках сделанных предположений механическую систему, состоящую из груза, нити, колес и Земли, следует считать изолированной консервативной системой. Пусть в некоторый момент времени t после начала движения скорость груза стала равна v. В соответствии с условием задачи и сказанным ранее, кинетическую энергию колеса, определяемую как сумма кинетических энергий всех его точек, можно считать равной кинетической энергии его обода, т.е. $0{,}5Mv^2$. По прошествии достаточно малого промежутка времени Δt ($\Delta t \to 0$) величина скорости груза увеличится на некоторую малую величину Δv, а приращение кинетической энергии рассматриваемой системы тел будет равно

$$\Delta W_k = 0{,}5(m+2M)\left((v+\Delta v)^2 - v^2\right) = (m+2M)\,v\Delta v .$$

(Утверждая это, мы считали, что кинетическая энергия Земли при опускании груза остается неизменной. Последнее утверждение может показаться неверным. В самом деле, поскольку импульс вращающегося вокруг неподвижной оси однородного тонкого обода равен нулю, как и импульс нити, то на основании закона сохранения импульса (рассматриваемая система при сделанных предположениях, конечно, является замкнутой) нужно считать, что приращения импульсов груза и Земли по отношению к инерциальной системе отсчета должны быть равны по величине. Однако, учитывая, что масса Земли во много раз больше массы груза, изменением скорости Земли по отношению к инерциальной системе отсчета, обусловленным движением груза, надо пренебречь. Поэтому следует пренебречь не только изменением кинетической энергии Земли, но и ее ускорением, обусловленным движением груза, а потому лабораторную систему отсчета действительно можно считать инерциальной.)

Поскольку выбранный промежуток времени Δt достаточно мал, величину ускорения a груза в течение этого промежутка с большой точностью можно считать постоянной. Следовательно, за этот промежуток времени скорость груза должна увеличиться на $\Delta v = a\Delta t$, а груз должен опуститься на $\Delta h = v\Delta t + 0{,}5a(\Delta t)^2$. Учитывая, что $v \gg 0{,}5a\Delta t$, последним слагаемым в предыдущей формуле следует пренебречь. Поэтому за рассматриваемый малый промежуток времени убыль потенциальной энергии системы будет равна

$$\Delta W_p = mg\Delta h = mgv\Delta t .$$

Из равенства $\Delta W_k = \Delta W_p$ получаем, что ускорение груза в течение рассматриваемого малого промежутка времени равно

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{m}{m+2M}g .$$

3. При решении задачи будем считать, что паровоз движется равномерно по прямолинейному горизонтальному участку пути и что состояние содержимого цилиндра все время близко к равновесному. Пренебрегая силами трения поршня и его штока о цилиндр, как это обычно и делается, если в условии задачи специально не оговорено иное, можно утверждать, что величина равнодействующей сил, действующих на поршень и шток со стороны цилиндра и его содержимого, равна (рис.23)

$$F_1 = (p - p_a)S .$$

В условии задачи не указана масса штока с поршнем и шатуна. Очевидно, что решение задачи будет более простым, если пренебречь массами этих тел и считать, что на шатун не действуют силы трения. Тогда, на основании второго и третьего законов Ньютона, можно утверждать, что горизонтальная составляющая F_2 силы, действующей на ось A, равна F_1.

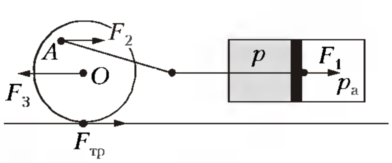


Рис. 23

На рисунке показана также сила F_3, действующая на колесо со стороны его оси O, и сила трения $F_{тр}$ со стороны дороги. Поскольку колесо вращается равномерно (по предположению, паровоз движется равномерно), сумма вращающих моментов, действующих на колесо, равна нулю. Так как вращающий момент силы F_2 максимальным будет тогда, когда оси A и O будут находиться на одной вертикали, максимальная величина силы трения колеса о рельс – силы тяги одного колеса – должна при наших предположениях удовлетворять условию

$$rF_2 = RF_{тр} .$$

Конечно, сказанное верно в предположении, что нет проскальзывания колеса по рельсу, т.е. коэффициент трения колеса о рельс достаточно велик.

Согласно второму закону Ньютона, при равномерном прямолинейном движении колеса сумма действующих на него сил равна нулю. Следовательно, величина искомой силы, действующей на ось O со стороны колеса, равна

$$F = F_3 = F_2 + F_{тр} = (p - p_a)(1 + r/R)S .$$

4. По условию задачи малые свободные колебания легкого диска, когда тяжелый диск лежит на столе, являются гармоническими. Поэтому период малых вертикальных колебаний легкого диска равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} ,$$

где m – масса легкого диска, а k – жесткость пружины. Поскольку при всех допустимых амплитудах колебаний пружина должна подчиняться закону Гука, нарушение гармоничности колебаний может быть обусловлено только изменением характера внешних сил, действующих на диски. Очевидно, что при всех возможных амплитудах колебаний величину ускорения свободного падения ($g = 9{,}8$ м/с^2) следует считать постоянной. Поэтому нарушение гармоничности колебаний возможно только из-за изменения характера силы реакции стола на лежащий на нем диск, т.е. из-за отрыва нижнего легкого диска от поверхности стола под действием сил упругой деформации растянутой пружины. Ясно, что отрыв нижнего диска от стола произойдет в тот момент, когда величина силы упругой деформации растягивающейся пружины превысит величину силы тяжести mg, действующей на легкий диск. Поскольку в положении равновесия тяжелый диск сжимает пружину на nmg/k, нарушение гармоничности вертикальных колебаний тяжелого диска при соблюдении сделанных выше предположений должно возникнуть, если амплитуда его колебаний превысит величину

$$x_m = \frac{n+1}{k}mg = \frac{n+1}{4\pi^2}gT^2 \approx 3 \text{ см} .$$

5. Учитывая, что давление p_1 газов в баллоне не очень сильно отличается от атмосферного и их температура близка к комнатной, будем считать, что к смеси газов применимо уравнение Клапейрона–Менделеева, а потому количество молей водорода ν_{H_2} и молей кислорода ν_{O_2} можно найти из уравнения

$$p_1V = \left(\nu_{H_2} + \nu_{O_2}\right)RT_1 ,$$

где R – универсальная газовая постоянная. С другой стороны, согласно определению молярной массы,

$$m = M_{H_2}\nu_{H_2} + M_{O_2}\nu_{O_2} ,$$

где $M_{H_2} = 2$ г/моль и $M_{O_2} = 32$ г/моль – молярные массы водорода и кислорода соответственно. Решая совместно приведенные уравнения, получим, что в исходном состоянии в баллоне находилось

$$\nu_{H_2} = \frac{M_{O_2} V p_1 - mRT_1}{\left(M_{O_2} - M_{H_2}\right) RT_1} \approx 6{,}3 \text{ моль}$$

и

$$\nu_{O_2} = \frac{mRT_1 - M_{H_2} V p_1}{\left(M_{O_2} - M_{H_2}\right) RT_1} \approx 1{,}5 \text{ моль}$$

водорода и кислорода соответственно. Отсюда следует, что после химической реакции

$$2H_2 + O_2 = 2H_2O$$

в баллоне будет находиться $\nu_1 = \nu_{H_2} - 2\nu_{O_2}$ молей водорода и $2\nu_{O_2}$ молей воды.

При остывании содержимого баллона до температуры $t_2 = 100$ °C и установлении термодинамического равновесия часть воды могла сконденсироваться. Если считать, что пары воды вплоть до точки насыщения ведут себя подобно идеальному газу, и вспомнить, что при нормальном атмосферном давлении вода кипит при 100 °C (а потому при указанной температуре давление насыщенных паров воды $p_н(100\ ^\circ C) = p_a = 1$ атм), то согласно уравнению Клапейрона–Менделеева в состоянии термодинамического равновесия в баллоне в конечном состоянии должно содержаться не менее

$$m_в = \left(2\nu_{O_2} - \frac{p_a V}{RT_2}\right) M_в \approx 18 \text{ г}$$

воды в конденсированном состоянии. Делая этот расчет, мы пренебрегли объемом сконденсировавшейся воды. Действительно, плотность воды при давлении порядка нескольких атмосфер и температуре 100 °C можно считать примерно равной 1 г/см^3 , следовательно, объем сконденсировавшейся воды должен быть близок к 18 см^3, что значительно меньше объема баллона $V = 60$ дм^3 . Исходя из сказанного, можно считать, что и оставшийся в баллоне после реакции водород находится в объеме V.

Таким образом, после установления конечной температуры в состоянии термодинамического равновесия в баллоне находятся водород, насыщенный пар воды и занимающая малую часть баллона вода в сконденсированном состоянии. Поскольку давление газообразной смеси равно сумме парциальных давлений ее составляющих, можно утверждать, что искомое давление должно быть близко к

$$p_x = p_a + \frac{\nu_1 RT_2}{V} \approx 2{,}8 \text{ атм}.$$

6. На рисунке 24 изображены два возможных цикла теплового двигателя, состоящие из изобары, изохоры и адиабаты (стрелками указаны направления изменения параметров газа). Если на этих рисунках изобразить изотермы, соответствующие разным температурам неизменного количества молей идеального газа, то легко доказать, что условиям задачи удовлетворяет лишь цикл, изображенный на рисунке 24,*а*, и наиболее низкую температуру газ должен иметь в точке *3* – точке пересечения изобары и изохоры. На участке *3–1*

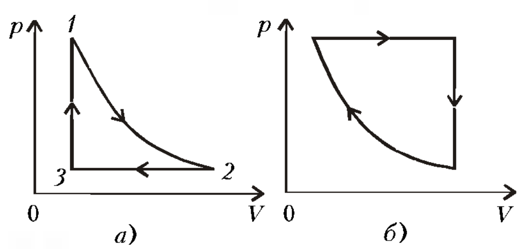


Рис. 24

(участок изохорического нагревания) газ не совершает работы, а количество теплоты, полученное газом на этом участке, равно

$$Q_{31} = 1{,}5R\left(T_1 - T_3\right).$$

На участке *2–3* от газа тепло должно отводиться, так как внутренняя энергия газа уменьшается и над газом совершают работу. Молярная теплоемкость идеального одноатомного газа при изобарическом процессе *2–3* равна 2,5 R, следовательно, на участке *2–3* от газа должно быть отведено количество теплоты

$$Q_{23} = 2{,}5R\left(T_2 - T_3\right).$$

На участке *1–3* (участок адиабатического расширения), по определению адиабатического процесса, теплообмена газа с окружающими телами нет, газ совершает работу, а его внутренняя энергия уменьшается.

По определению коэффициент полезного действия цикла равен $\eta = A/Q_н$, где A – совершенная газом за цикл работа, а $Q_н$ – полученное от нагревателя за цикл количество теплоты. В соответствии с первым законом термодинамики, если газ отдает холодильнику количество теплоты $Q_х$, то

$$A = Q_н - Q_х = Q_{31} - Q_{23}.$$

Решая совместно составленные уравнения, получим, что температура газа в конце адиабатического расширения (точка *2* на рисунке 24,*а*) равна

$$T_2 = 0{,}6(1-\eta)T_1 + (0{,}4 + 0{,}6\eta)T_3.$$

Наконец, воспользовавшись полученным значением T_2 и уравнением Клапейрона–Менделеева, определим работу над газом при его сжатии, т.е. работу, совершаемую над газом на участке *2–3*:

$$A_{23} = p_2\left(V_2 - V_3\right) = R\left(T_2 - T_3\right) = 0{,}6R(1-\eta)\left(T_1 - T_3\right).$$

7. При возникновении электрических контактов между обкладками конденсатора и проводящими пластинами через них начинает протекать ток, а на границах проводников накапливаются избыточные электрические заряды. Под действием электрического поля, создаваемого этими зарядами, по прошествии достаточно большого промежутка времени через любое поперечное сечение цепи должен протекать один и тот же ток, величина которого, в соответствии с законом Ома для участка цепи, равна $I = U/\left(R_1 + R_2\right)$, где R_1 и R_2 – сопротивления первой и второй пластин. При этом, конечно, предполагается, что обкладки конденсатора сделаны из идеальных проводников и сопротивление контактов между соприкасающимися телами равно нулю. Поэтому поверхности пластин, касающиеся обкладок, можно считать эквипотенциальными. Тогда сопротивление однородного призматического проводника, как и тонкого проводника, можно вычислить по формуле $R = \rho l/S$, где ρ – удельное сопротивление материала проводника, l – длина проводника, а S – площадь его поперечного сечения. Следовательно, сила постоянного тока и модуль разности потенциалов U_1 между плоскостями первой пластины, касающимися обкладки конденсатора и второй пластины, связаны соотношением

$$I = \frac{2U_1 S}{\rho_1 d} = \frac{2\left(U - U_1\right) S}{\rho_2 d}.$$

Учитывая, что пластины однородные и имеют одинаковые сечения, а обкладки конденсатора являются эквипотенциальными плоскостями (по предположению, они идеальные проводники), можно утверждать, что в установившемся режиме электрическое поле в пределах каждой из пластин является однородным и порождается зарядами, находящимися на обкладках и на границе между пластинами. Утверждая это, мы учли, что по условию задачи конденсатор плоский, а потому можно пренебречь краевыми эффектами и считать, что заряды равномерно распределены по указанным плоскостям, а полем зарядов на торцах пластин можно пренебречь. Если считать, что удельное сопротивление первой пластины меньше, чем второй, и ток течет от первой пластины ко второй, на плоскости соприкосновения пластин должен находиться избыточный положительный заряд. Пусть поверхностная плотность этого заряда σ. Зная, что вектор напряженности поля плоскости, равномерно заряженной положительным зарядом, направлен по нормали от нее, а его модуль равен $E = \sigma/(2\varepsilon_0)$, где ε_0 – электрическая постоянная, на основании принципа суперпозиции полей можно записать

$$\frac{2U_1}{d} = \frac{U}{d} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Из полученных соотношений находим искомую плотность зарядов на границе соприкосновения пластин:

$$\sigma = \frac{2(\rho_2 - \rho_1)\varepsilon_0 U}{(\rho_1 + \rho_2)d}.$$

8. При решении задачи будем считать, что ось, вокруг которой может поворачиваться треугольник, и опора, на которую он опирается, покоятся относительно лабораторной системы отсчета и эта система является инерциальной. Тогда можно утверждать, что сумма моментов всех сил, действующих на покоящийся треугольник, относительно заданной оси должна быть равна нулю. По условию задачи треугольник может свободно вращаться вокруг оси, следовательно, на него не действуют силы трения. Поэтому треугольник перестанет давить на опору тогда, когда момент сил тяжести будет уравновешен моментом сил Ампера, действующих на стороны треугольника.

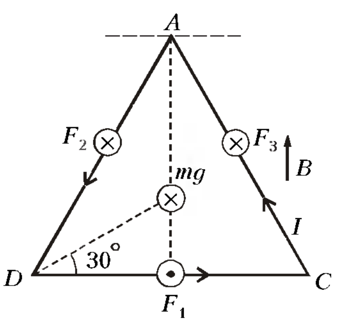


Рис. 25

Будем считать, что проволока, из которой изготовлен треугольник, является однородной. Тогда равнодействующую сил тяжести mg следует считать приложенной к центру треугольника, как показано на рисунке 25. Поскольку треугольник является равносторонним, а проволока тонкой, точка приложения указанной равнодействующей должна находиться от оси вращения A на расстоянии $h = a/(2\cos 30^\circ) = a/\sqrt{3}$. Таким образом, момент сил тяжести относительно заданной оси равен

$$M_т = \frac{amg}{\sqrt{3}}.$$

Пусть по проволоке, из которой изготовлен треугольник, протекает постоянный ток в том из двух возможных направлений, которое указано на рисунке 25 стрелками на сторонах треугольника. Как известно, действующая на элемент тока сила Ампера равна $\Delta\vec{F} = \left[I\Delta\vec{L}\cdot\vec{B}_\Sigma\right]$, где $\Delta\vec{L}$ – вектор, направление которого совпадает с направлением тока, а модуль равен длине столь малого отрезка проводника, что в месте его нахождения индукцию магнитного поля в отсутствие данного элемента можно считать постоянной и равной $\vec{B}_\Sigma$. В рассматриваемом случае индукция магнитного поля $\vec{B}_\Sigma$ равна сумме индукции внешнего однородного поля $\vec{B}$ и индукции поля $\vec{B}_c$, порождаемого током в сторонах треугольника за исключением того участка проволоки, действие силы Ампера на который вычисляется. Поскольку линии индукции поля $\vec{B}_c$ пересекают плоскость треугольника по нормали к ней, из закона Ампера следует, что на малый элемент стороны треугольника за счет поля $\vec{B}_c$ будет действовать сила, линия действия которой лежит в плоскости треугольника и направлена по нормали к рассматриваемому элементу. Следовательно, момент этих сил относительно заданной оси вращения равен нулю, но они обусловливают возникновение механических напряжений в проводниках контура.

Составляющие силы Ампера, обусловленные наличием внешнего магнитного поля $\vec{B}$, линии индукции которого по условию задачи коллинеарны плоскости треугольника и перпендикулярны оси вращения, направлены вертикально, а потому будут создавать вращающий момент относительно заданной оси. Сторона DC треугольника находится от оси вращения на расстоянии $h_1 = a\sin 60^\circ$, а величина действующей на нее силы равна $F_1 = IaB$. Поэтому величина обусловленного внешним полем вращающего момента, действующего на сторону DC, равна

$$M_1 = h_1F_1 = a^2IB\sin 60^\circ = 0{,}5\sqrt{3}\,a^2IB.$$

Несколько сложнее обстоит дело с вычислением вращающего момента, действующего на стороны AD и AC. На маленький кусочек проволоки стороны AD длиной ΔL, находящийся от оси вращения в среднем на расстоянии x_i ($0 \le x_i \le$ $\le a\cos 60^\circ$), со стороны внешнего магнитного поля действует вращающий момент, величина которого равна

$$\Delta M_i = x_iIB\Delta L\sin 30^\circ = IB\,\mathrm{tg}\,30^\circ\cdot x_i\Delta x.$$

Здесь было учтено, что, в соответствии с условием задачи, угол между вектором $\vec{B}$ и стороной AD равен либо 30°, либо 150°, но $\sin 30^\circ = \sin 150^\circ$, и что $\Delta L = \Delta x/\cos 30^\circ$. Для нахождения величины вращающего момента M_2, действующего на всю сторону AD, следует найти сумму всех моментов, действующих на участки этой стороны. Сделать это можно, например, обратившись к рисунку 26, на котором показан график функции $y = x$. Действительно, величину $x_i\Delta x$ с точки зрения геометрии можно трактовать как площадь прямоугольника высотой x_i и длиной основания Δx. Тогда величина момента M_2 должна быть пропорциональна площади прямоугольного треугольника, длина катетов которого равна $a\cos 60^\circ$:

$$M_2 = 0{,}5\left(a\cos 60^\circ\right)^2 IB\,\mathrm{tg}\,30^\circ = \sqrt{3}\,a^2IB/8.$$

Рассуждая аналогично, можно доказать, что на сторону треугольника AC должен действовать такой же вращающий момент, как и на сторону AD. Вспоминая правило нахождения направления вектора, равного векторному произведению двух других векторов (или правило нахождения направления силы Ампера), можно доказать, что моменты, действующие на стороны AD и AC, стремятся вызвать поворот треугольника в сторону, противоположную вращению, которое могло бы возникнуть под действием момента M_1. Поскольку $2M_2 < M_1$, то треугольник перестанет давить на опору при выбранном направлении тока в его сторонах, если вектор индукции $\vec{B}$ будет направлен так, как показано на рисунке 25, а его величина будет такой, чтобы выполнялось соотношение

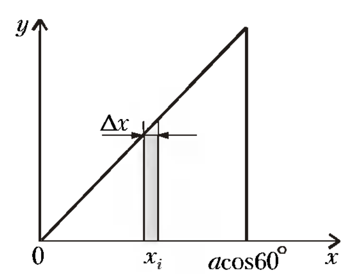


Рис. 26

$$M_1 = 2M_2 + M_т. \qquad (5)$$

Решая полученную систему уравнений, найдем, что искомое значение индукции внешнего поля равно

$$B = \frac{4mg}{3al}.$$

9. Поскольку в условии задачи специально не оговорено положение оптической оси объектива, будем решать задачу, полагая, что эта ось проходит через центр Солнца. Тогда можно утверждать, что изображение Солнца (весьма удаленного от объектива светящегося шара), даваемое первой собирающей линзой, должно располагаться в ее фокальной плоскости и иметь вид круга, центр которого лежит на оптической оси, а радиус равен $r = F_1 \operatorname{tg}\alpha$, где α – половина угла, под кото-

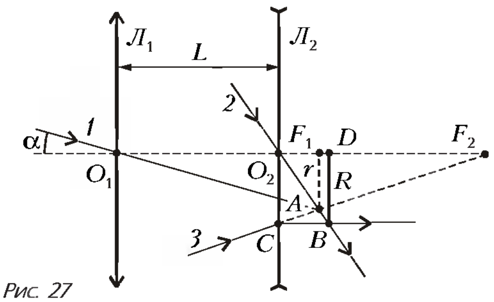


Рис. 27

рым виден диаметр Солнца из места расположения линзы (рис.27).

По условию задачи рассеивающая линза расположена за собирающей на расстоянии L, меньшем фокусного расстояния последней. Поэтому для нахождения изображения Солнца, получаемого с помощью заданного объектива, круг радиусом r следует рассматривать как мнимый предмет, изображение которого рассеивающей линзой и является искомым. Воспользовавшись формулой линзы, можно найти положение изображения, формируемого рассеивающей линзой, а затем, используя формулу для поперечного увеличения, определить радиус R изображения Солнца, получаемого с помощью данного объектива. Однако решить задачу можно и не прибегая к указанным формулам, а построив изображение круга радиусом r, полагая, как и при использовании ранее указанных соотношений, что, изображение Солнца является стигматичным.

На рисунке 27 показан один из возможных вариантов такого построения. Здесь цифрой *1* обозначен один из лучей, идущих от крайних точек Солнца и проходящих через оптический центр O_1 собирающей линзы $Л_1$. Ход этого луча за точкой его пересечения с главной плоскостью рассеивающей линзы $Л_2$ вплоть до точки A его пересечения с фокальной плоскостью собирающей линзы показан пунктирной линией. По предположению, изображение Солнца является стигматичным, т.е. все лучи, исходящие из некоторой его точки, должны пересекаться в одной и той же одной точке – точке, являющейся изображением рассматриваемой точки Солнца. Поэтому для нахождения изображения точки A можно воспользоваться, например, лучом *2*, совпадающим с побочной оптической осью рассеивающей линзы, проходящей через точку A, и лучом *3*, продолжение которого (на рисунке 27 оно изображено пунктирной линией) проходит через точку A и главный фокус F_2 рассеивающей линзы. После пересечения главной плоскости линзы $Л_2$ в точке C луч *3* выходит из нее параллельно оптической оси объектива и пересекает луч *2* в точке B, являющейся изображением точки A. Из подобия прямоугольных треугольников F_1F_2A и O_2F_2C следует, что $r/R = \left(|F_2| - F_1 + L\right)/|F_2|$.

Поскольку изображения Солнца, создаваемые неизвестной тонкой линзой и данным объективом, должны быть одинаковыми, то главная оптическая ось этой линзы должна проходить через центр Солнца, а ее фокусное расстояние должно быть равно

$$F = \frac{R}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{F_1|F_2|}{|F_2| - F_1 + L} = 25 \text{ см}.$$

10. Падающий на пластинку параллельный пучок фотонов, имеющих одинаковую энергию, с точки зрения электромагнитной теории света следует рассматривать как плоскую монохроматическую волну, частота колебаний в которой равна $\nu = W/h$, где $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с – постоянная Планка. Часть этой волны, падающая на горизонтальную плоскость пластинки, внутри нее распространяется в прежнем направлении, так как скорость фотонов направлена вертикально вниз. Часть же волны, падающая на образующую с горизонтом угол α плоскую поверхность пластинки, испытывает преломление (рис.28). Считая, как обычно, стекло однородным прозрачным изотропным материалом, на основании известного закона геометрической оптики можно доказать, что нормаль к волновому фронту этой части волны внутри пластинки должна образовывать с вертикалью угол β, удовлетворяющий соотношению $\sin\alpha = n\sin(\alpha - \beta)$, или $\beta = (1 - 1/n)\alpha$, так как $\alpha \ll 1$ рад.

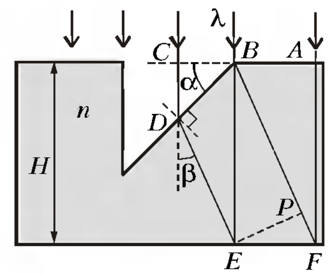


Рис. 28

По условию задачи на матовой нижней плоскости пластинки наблюдается интерференционная картина. Поскольку в задаче требуется определить наибольший порядок максимума в этой картине, будем считать, что интерференционная картина может наблюдаться во всей области, где имеет место наложение световых пучков. Из рисунка 28 ясно, что интерференция может иметь место лишь на отрезке EF. Считая, что пластинка находится в воздухе, показатель преломления которого, как обычно, будем считать равным единице, можно доказать, что при заданных параметрах пластинки и энергии падающих фотонов наибольшая разность хода будет иметь место в точке F. Следовательно, максимальный порядок наблюдаемого интерференционного максимума должен быть равен целой части отношения разности длин отрезков BF и AF к длине волны λ распространяющегося в пластинке излучения. Поскольку скорость света в вакууме равна $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, а фазовая скорость света в пластинке в n раз меньше, то искомый порядок интерференции должен быть равен целой части отношения

$$\frac{BF - AF}{\lambda} n = \frac{nH}{\lambda}\left(\frac{1}{\cos\beta} - 1\right), \text{ где } \lambda = \frac{hc}{W}.$$

Учитывая, что, в силу малости угла, $\cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta} \approx$ $\approx 1 - \beta^2/2$, получим

$$k_{\max} \approx E\left\{\frac{nH\beta^2}{2\lambda}\right\} = E\left\{\frac{(n-1)^2\alpha^2 HW}{2nhc}\right\} = 6,$$

где символ $E\{\ldots\}$ означает, что от стоящего в фигурных скобках выражения должна быть взята целая часть.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. $\tau = \dfrac{2L}{v_0}\dfrac{M^2}{m^2}$.

2. $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta + \sqrt{1 + \left(m\sin^2\beta\right)/M}} = \operatorname{arctg} 0{,}4 \approx 22^\circ$.

3. $H = h\left(1 + \dfrac{M_1 + m}{M_2}\right) = 25$ см.

4. $a_1 = \sqrt{a_2(4g - a_2)}/2 \approx 9{,}7$ м/с^2.

5. $p = \dfrac{\rho g h V_1 - p_0 (V_0 - V_1)}{V_1 - V_0 \varphi/100\%} = 5$ кПа .

6. $Q = cm|t| + \lambda m\left(1 - m^2/\left(\rho_л^2 S^3\right)\right) \approx 3{,}5$ кДж .

7. $q_1 = 2l\sqrt{\pi\varepsilon_0}\left(\sqrt{F_2} \pm \sqrt{F_2 - F_1}\right)$, $q_2 = 2l\sqrt{\pi\varepsilon_0}\left(\sqrt{F_2} \mp \sqrt{F_2 - F_1}\right)$.

8. $\alpha = 1/2$.

9. $n > 2$.

10. $D = \dfrac{b(d-F)^2}{dF(dF + Fb - db)} \approx 5$ дптр .

Химический факультет

1. $a = \dfrac{2(l_2/t_2 - l_1/t_1)}{t_1 + t_2}$. **2.** $t = \dfrac{\sqrt{v_1 v_2}}{g} = 0{,}6$ с .

3. $l = 2v_0\sqrt{\dfrac{2h}{g}} = 8$ м . **4.** $\rho = \rho_0/2$.

5. $A = RT_1\dfrac{(n+1)(k-1)}{2n} = 1660$ Дж ,

$\Delta U = \dfrac{3}{2}RT_1\dfrac{k-n}{n} = -1245$ Дж .

6. $m = \dfrac{Mp_0(V_0 - M/\rho_0)}{RT} = 0{,}58$ г . **7.** $k = 16/9$.

8. $\omega_{\max} = \dfrac{qrB + \sqrt{q^2r^2B^2 + 4m^2\mu g r}}{2mr}$.

9. $u = v\Big/\sqrt{n^2 - 1} \approx 1{,}13$ м/с .

10. $F = \dfrac{l_2h_2 - l_1h_1}{h_2 - h_1} = \dfrac{3}{7}$ м $\approx 0{,}43$ м .

Уравнения Пелля

(см. «Квант» №4 за 2002 г.)

47. Поскольку квадрат натурального числа может оканчиваться лишь на одну из цифр 0, 1, 4, 5, 6, 9, нужно решить в натуральных числах уравнения $x^2 - 10y^2 = 0$, 1, 4, 5, 6 или 9. Два из них – а именно, уравнение $x^2 - 10y^2 = 0$ и уравнение $x^2 - 10y^2 = 5$ – решений в натуральных числах не имеют. А остальные имеют: $x + y\sqrt{10} = a\left(19 + 6\sqrt{10}\right)^n$, где n – целое неотрицательное число, $a = 1, 2, 4 + \sqrt{10}$, $16 + 5\sqrt{10}$, $3, 7 + 2\sqrt{10}$ или $13 + 4\sqrt{10}$.

48. а) $x + y\sqrt{17} = \pm a\left(4 + \sqrt{17}\right)^{2n}$, где $a \in \left\{-1 + \sqrt{17}; 1 + \sqrt{17}; 16 + 4\sqrt{17}\right\}$, а n – целое число.

49. Пусть $a^2 - dy^2 = 1$, где a, b – натуральные числа. Рассмотрите такое натуральное число m, что $\left(x + y\sqrt{d}\right)^{m-1} < a + b\sqrt{d} \le \left(x + y\sqrt{d}\right)^m$, и такие рациональные числа z и t, что $z + t\sqrt{d} = \left(a + b\sqrt{d}\right)\Big/\left(x + y\sqrt{d}\right)^{m-1} = \left(a + b\sqrt{d}\right)\left(y\sqrt{d} - x\right)^{m-1}$.

50. В силу упражнения 49, находим $q = \left(a + \sqrt{a^2+1}\right)^2 = 2a^2 + 1 + 2a\sqrt{a^2+1}$. Поскольку числа $-1 + \sqrt{a^2+1}$, $1 + \sqrt{a^2+1}$ и $a^2 + a\sqrt{a^2+1}$ больше 1 и не превосходят $2a^2 + 1 + 2a\sqrt{a^2+1}$, то множеству M принадлежат пары $(-1; 1)$, $(1; 1)$ и $\left(a^2; a\right)$.

51. В формулировке этой задачи допущены ошибки. Вместо слова «наибольшее» должно быть «наименьшее», а в п. б) один из «$\pm$» следует заменить на «$\mp$».

а) Если a четно, то b нечетно, $b^2 \equiv 1 \pmod 4$ и $1 = a^2 - pb^2 \equiv 0 - 1 \cdot 1 \pmod 4$.

б) Рассмотрите равенство $(a-1)(a+1) = pb^2$ и воспользуйтесь основной теоремой арифметики и тем, что НОД($a - 1$, $a + 1$) = 2.

в) $u^2 - pv^2 = \dfrac{a \pm 1}{2} - \dfrac{a \mp 1}{2} = \pm 1$. Равенство $u^2 - pv^2 = 1$ невозможно, поскольку a – *наименьшее* из возможных.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.Д.Акатьева, Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, А.И.Пацхверия, Е.А.Силина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрироваван в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати
142300 г.Чехов Московской области
Заказ №

Матч
нового века

В Москве в Государственном Кремлевском Дворце с 8 по 11 сентября 2002 года состоялось историческое событие – шахматный матч между сборными России и мира. Напомним, что два подобных поединка уже прошли в XX веке (Белград, 1970 и Лондон, 1984), но тогда миру противостоял Советский Союз. Оба матча игрались на десяти досках в четыре круга и в результате упорной борьбы закончились победой советской команды, соответственно, 20,5:19,5 и 21:19.

«Матч нового века» проходил по новой системе, шевенингенской. В командах тоже было по десять человек (и двое запасных), но играли они не по доскам, а каждый с каждым, причем в быстрые шахматы – с контролем 25 минут на всю партию (10 секунд добавлялось после каждого хода).

Перед стартом уникального матча предпочтение отдавалось сборной России, ведь в нее входили четыре чемпиона мира разных времен – три «классика»: Карпов, Каспаров, Крамник и чемпион мира ФИДЕ Халифман. Однако именитые шахматисты как раз и подвели...

В первый день состоялось два тура. Сенсацией стало поражение Каспарова от Иванчука. В итоге сборная мира вырвалась вперед на три очка.

На следующий день состоялось еще три тура, и россияне сократили разрыв до минимума, но после еще трех туров опять отстали.

В заключительный день матча состоялись последние два тура, и особый интерес вызвала встреча Каспарова с Пономаревым. И правда, все, что сейчас происходит в шахматном мире, смотрится сквозь призму предстоящих весной и летом битв: Крамник – Леко и Каспаров – Пономарев. Напомним, что победители этих матчей осенью 2003-го сразятся в поединке за звание абсолютного чемпиона мира.

Сборная России, в которую входило сразу четыре шахматных короля, в 100 партиях уступила сборной мира 48:52. Солидный разрыв как раз определился во встречах чемпионов мира: они набрали «– 4», причем у непобедимого Гарри Каспарова всего 4 очка из десяти. Самое неудачное выступление в его шахматной карьере.

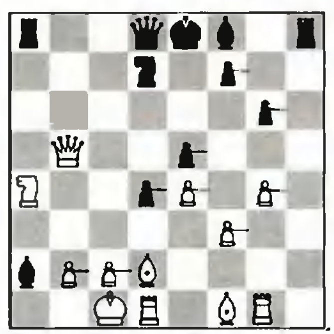
Абсолютно лучший результат показал Алексей Широв – 7 очков из десяти, на очко меньше набрали Руслан Пономарев и Василий Иванчук (Украина), Борис Гельфанд (Израиль), а также россияне Евгений Бареев и Александр Морозевич.

Приведем несколько образцов игры в «Матче нового века».

В.Иванчук – Г.Каспаров

Сицилианская защита

1. e4 c5 2. ♘f3 d6 3. d4 cd 4. ♘:d4 ♘f6 5. ♘c3 a6 6. ♖g1 g6 7. g4 ♗g7 8. ♗e3 ♘e6 9. f3. Получилось что-то похожее на вариант дракона. **9...e5.** Спорное решение, теперь пешка d6 будет нуждаться в защите. **10. ♘:c6 bc 11. ♕d2 ♗e6 12. 0-0-0 ♗f8.** Приходится возвращаться на место. **13. ♘a4 h5 14. h3 ♘d7 15. ♕c3 hg 16. hg d5 17. ♕:c6 d4.** Пешка потеряна, а с контригрой ничего не выходит **18. ♗d2 ♖c8 19. ♕b7 ♖b8 20. ♕:a6 ♖a8 21. ♕b5 ♗:a2.** Нападать на ферзя до бесконечности не удается: 21... ♖b8 22. ♕a5.



22. ♗c4! Белые завершают развитие фигур, и все становится ясно. **22... ♗:c4 23. ♕:c4 ♕f6 24. g5 ♕d6 25. ♔b1 ♖h3 26. ♖f1 ♗e7 27. B3 ♕a3 28. ♗c1 ♕b4 29. ♕:b4 ♗:b4 30. f4 ♖b4 31. ♖h1 ♖:h1 32. ♖:h1 ♔e7 33. f5 ♖a6 34. ♖h7 ♘c5 35. ♗d2 ♖:a4 36. fg! ♗:d2 37. ba ♘:e4 38. g7!** Пешка проскочила в ферзи. **Черные сдались.**

Т.Раджабов – А.Карпов

Новоиндийская защита

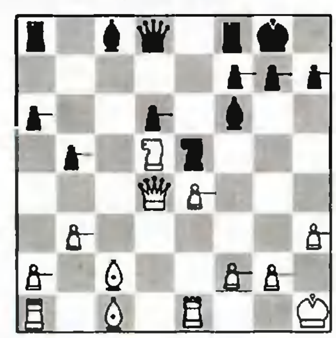
1. d4 ♘f6 2. c4 e6 3. ♘f3 b6 4. A3 ♗b7 5. ♘c3 d5 6. cd ♘:d5 7. E3 g6 8. ♗b5+ c6 9. ♗a4 ♗g7 10. 0-0 0-0 11. e4 ♘:c3 12. bc c5 13. ♗g5 ♕d6. Вызывая огонь на себя, надежнее сразу 13... ♕c7. **14. ♖e1 ♘c6 15. e5 ♕c7 16. ♕d2 ♘a5.** Прыжок коня на край доски – первопричина проблем черных. Заслуживало внимания 16... ♘e7, переводя всадника на f5. **17. ♖ac1 ♗d5 18. ♕c4!** Белые готовятся к прямой атаке на неприятельского короля. **18. ...♖fc8 19. h4 ♕b7 20. ♗f6 ♗f8 21. ♘h2.** Пожалуй, еще сильнее 21. h5! **21...cd.** Упуская хороший контршанс 21... ♗:g2 **22. ♘g4 ♗h1. 22. cd ♖:c1 23. ♖:c1 ♗:g2 24. ♘g4!** Теперь 24... ♗h1 не годится из-за 25. ♗c6! ♗:c6 26. ♘h6+ с неизбежным матом.

24...h5 25. ♘e3. К цели вело 25. ♘h6+ ♔h7 26. ♘:f7! ♕:f7 27. ♔:g2 ♗h6 28. ♕e4 ♗:c1 29. ♕:a8+. **25... ♗e4 26. ♗d1 b5 27. d5 ♗:d5?** Упорнее 27...ed, сохраняя слона для защиты. **28. ♘:d5 ed 29. e6! ♘c4 30. Фg5.** Еще убедительнее 30. ♗:h5! **30... ♔h7 31. ♗c2 ♗g7 32. ♖e1.** Симпатичен и такой форсированный вариант: 32. ♕:h5+ ♔g8 33. ef+ ♕:f7 34. ♗:g6 ♕:f6 35. ♕:d5+. **32. ♖e8 33. ♕:h5+ ♔g8 34. ♗:g6! ♔f8.** Жаль, партия могла закончиться весьма эффектно: 34...fg 35. ♕:g6 ♖e7 36. h5 ♔f8 37. ♗:e7+ ♕:e7 38. h6 ♗h8 39. h7 ♗g7 40. ♕h6! **35. e7+. Черные сдались.**

Г.Каспаров – Р.Пономарев

Испанская партия

1. e4 c5 2. ♘f3 ♘c6 3. ♗b5 a6 4. ♗a4 ♘f6 5. 0-0 ♗e7 6. ♖e1 b5 7. ♗b3 d6 8. C3 0-0 9. H3 ♘a5 10. ♗c2 c5 11. d4 ♘d7 12. b3 cd 13. cd ♘c6 14. ♘c3 ed. Новинка в известном варианте, но, видимо, не совсем удачная. Нет смысла сдавать центр, лучше испытанное на практике 14... ♘b4 15. ♗b2 ♘:c2 16. ♕:c2 ♗b7. **15. ♘d5! ♘de5 16. ♘:d4 ♘:d4 17. ♕:d4.** Перевес белых в центре очевиден. **17... ♗f6 18. ♔hl.**



18... ♗:h3! Остроумное решение, которое, впрочем, не должно было выручить черных. **19. gh ♕c8 20. ♘:f6+ gf 21. ♖g1+?** Позволяет черным выйти сухими из воды. На g1 надо было пропустить другую ладью: 21. ♖e3! ♕:c2 22. ♖c3 ♕e2 23. ♗h6 ♖fe8 (без качества вряд ли можно на что-то надеяться) 24. ♖g1+ ♔h8 25. ♖cg3! со смертельной атакой. **21... ♔h8 22. ♖e3 ♕:c2 23. ♕f4 ♘d7 24. ♕f5 ♖g8! 25. ♘e3.** Увы, конь неуязвим: 25. ♕:d7 ♕:e4+ 26. ♔h2 ♖:g1 27. ♔:g1 ♖ ♕8+. **25...d5!** Еще один фокус молодого чемпиона мира. **26. ♕:d7?** Соглашаясь на вечный шах. Шансы на успех белые сохраняли, продолжая 26. ♖d1. **26... ♕:e4+ 27. ♔h2. Ничья.**

Эта партия – хорошая пища для размышлений обоим гроссмейстерам, которым предстоит встретиться в матче.

Е.Гик

Индекс 70465

Физики и математики на монетах мира

ГОТФРИДУ ВИЛЬГЕЛЬМУ ЛЕЙБНИЦУ (1646–1716) посвящены юбилейные монеты двух немецких государств – Германской Демократической Республики и Федеративной Республики Германии, выпущенные ограниченным тиражом к 250-летию великого немецкого математика. На обеих монетах (достоинством в 200 и в 5 марок) запечатлен портрет человека, подарившего миру мощнейший инструмент научного познания – дифференциальное и интегральное исчисления.

(Подробнее о жизни и научной деятельности ученого – внутри журнала.)